II.H.6

Astronomie

Aufbruch zum Mond

Matthias Borchardt, Bonn
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier

© wikihow/Chris Hadley – www.wikihow.com

Am 21. Juli 1969 betraten erstmals Menschen den Mond. Heute ist das Interesse am Mond neu entfacht: Unbemannte Mondmissionen von Nationen wie China, Indien und Israel gut 50 Jahre nach den Mondlandungen der USA haben nun auch Amerikaner und Russen veranlasst, sich dem Mond wieder zuzuwenden. Das Thema Raumfahrt in Richtung Mond ist aktuell wie selten zuvor. Die motivierende Kraft, die dem Ganzen innewohnt, sollte im Physikunterricht genutzt werden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	10–12 (G8), 11–13 (G9)
Dauer:	12–14 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Qualitative und quantitative Bearbeitung von Bewegungsvorgängen in Gravitationsfeldern, Grundlagen des Raketenantriebs, Umgang mit Simulationen und Mathematiksoftware, Berechnung von Beschleunigungen und Geschwindigkeiten von Raketen, historische und gesellschaftlich relevante Aspekte der Weltraumfahrt
Thematische Bereiche:	Beschleunigte Bewegungen in Gravitationsfeldern, Raketenantrieb
Medien:	Computersimulationen, Taschenrechner, Mathematiksoftware

Fachliche und didaktisch-methodische Hinweise

Dieser Beitrag stellt mögliche Zugänge zur Thematik vor. Beginnend mit der Frage, wie man dem Gravitationsfeld der Erde entkommen kann, über erste naive Vorstellungen eines Mondflugs nach Jules Verne berechnen Ihre Schüler schließlich die Geschwindigkeiten der riesigen, dreistufigen Saturn-V-Rakete. Aber auch Fragen nach der Sinnhaftigkeit einer bemannten Raumfahrt werden thematisiert.
Computersimulationen ermöglichen einen anschaulichen und handlungsorientierten Zugang zu einzelnen Fragen des Themas.

Einordnung des Themas

Am 21. Juli 1969, also vor mehr als fünfzig Jahren, setzte ein Mensch zum ersten Mal seinen Fuß auf die staubbedeckte Oberfläche des Mondes. Nach den medienwirksamen Mondlandungen der Amerikaner wurde es um den Mond jedoch bald wieder ruhig. Dies hat sich inzwischen erheblich geändert – der Mond ist seit kurzem wieder eindeutig im Fokus der internationalen Raumfahrt. Raumsonden und Rover wurden und werden auf unseren Erdtrabanten geschickt und Überlegungen, Menschen erneut dorthin zu entsenden, werden kontrovers diskutiert. Sogar von bemannten Mondbasen ist inzwischen die Rede. Themen aus der Raumfahrt wohnen seit jeher eine starke motivierende Kraft für den Physikunterricht inne, sodass sich die Einbindung des Themas „Aufbruch zum Mond" in den Unterricht geradezu aufdrängt. Berührungspunkte zum Lehrplan gibt es zur Genüge. So passt beispielsweise die Frage, wie man sich vom Gravitationsfeld der Erde lösen und die notwendigen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aufbauen kann, um den Sprung zu unserem nächstgelegenen Himmelskörper zu schaffen, optimal in das Inhaltsfeld der Mechanik. Dies gilt auch für den Raketenantrieb, dessen Behandlung den Impulsbegriff in einen stark anwendungsorientierten Kontext stellt. Die Materialien sind daher im Unterricht der Einführungsphase zur Oberstufe verortet.

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden sollten mit den Gesetzen der gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten Bewegung vertraut sein. Auch die Kreisbewegungen (Zentripetalkraft) sowie das Gravitationsgesetz nach Newton sollten bereits thematisiert worden sein. Das Thema Impuls und Impulserhaltung ist zum Verständnis des Raketenantriebs nützlich – allerdings sind die Materialien so gestaltet, dass Sie auch ohne diese Inhalte auskommen.
Ihre Schüler sollten mit der Mathematiksoftware GeoGebra umgehen können. Für Rechercheaufträge und die Verwendung von Computersimulationen ist es erforderlich, dass die Lernenden Zugang zu Computern mit Internetanschluss haben.

Didaktische und methodische Aspekte

Ein Grundproblem des Physikunterrichts der Oberstufe ist zuweilen die Tatsache, dass die Einführung mathematischer Inhalte und Methoden dem Physikunterricht hinterherhinkt. Dies zeigt sich besonders beim Thema Raketenphysik. Die Herleitung der Ziolkowskiformel[1] zur Geschwindigkeitsberechnung einer Rakete verlangt Kenntnisse der Integralrechnung und der natürlichen Logarithmusfunktion. Diese Inhalte stellt der Mathematikunterricht in der Regel aber erst viel später bereit,

[1] Benannt nach dem russischen Naturforscher Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski (1857–1935), der 1903 die Grundformel für die Berechnung der Geschwindigkeit von Raketen veröffentlichte.

nämlich dann, wenn man dem Themengebiet der Mechanik bereits den Rücken gekehrt hat. Die erwähnten mathematischen Schwierigkeiten lassen sich jedoch durch den Einsatz einer Mathematiksoftware wie z. B. GeoGebra umgehen, denn die Endgeschwindigkeit einer Rakete ergibt sich aus dem Flächeninhalt unter der Beschleunigungskurve der Rakete. Diese Fläche lässt sich leicht mit besagter Software ermitteln.

Auch der Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern (GTR) stellt eine gute Möglichkeit dar. Der Umstand, dass die Lernenden die Beschleunigungsfunktion grafisch darstellen, ist didaktisch besonders wertvoll, denn die Kurve vermittelt einen direkten Eindruck von der Dynamik des Beschleunigungsvorganges insgesamt. Dagegen erscheint die Verwendung der Ziolkowskiformel eher als statisch, da lediglich der Anfangs- und der Endzustand der Rakete betrachtet werden – die zeitliche Entwicklung der Beschleunigung bleibt dabei unsichtbar.

Die Beschleunigungsfunktion wird im Einzelnen nicht hergeleitet, sondern den Lernenden in den Materialien mitgeteilt. Die Herleitung der Funktion ist anspruchsvoll, zeitintensiv und nur in besonders starken Lerngruppen sinnvoll, wenn das Thema Impulsantrieb und Raketenphysik intensiver thematisiert wird.[2] Daher erscheint es didaktisch gesehen wichtiger und sinnvoller, dass die Lernenden den Raketenantrieb als eine Bewegung mit nichtkonstanter Beschleunigung erkennen und verstehen, von welchen Größen der Geschwindigkeitszuwachs letztendlich abhängt.

Hinweise zur Reihenfolge der Materialien und zur Unterrichtsgestaltung

Die Materialien bauen aufeinander auf. Es ist daher sinnvoll, wenn Ihre Schüler bei der Bearbeitung die Reihenfolge einhalten.

Die Materialien **M 1** und **M 2** thematisieren die Frage, welche Geschwindigkeiten ein Raumflugkörper aufweisen muss, um eine Erdumlaufbahn auszuführen bzw. um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen. Diese Mindestgeschwindigkeiten werden als erste und zweite kosmische Geschwindigkeit, manchmal auch als Flucht- oder Entweichgeschwindigkeit bezeichnet. In den Materialien wird konkret Bezug genommen auf die berühmte Apollo-11-Mission im Jahr 1969. **Zu M 1 und M 2**

Die Geschwindigkeiten, die nach dem Brennschluss der Triebwerke erreicht werden müssen, sind die eine Sache – die andere und vielleicht noch entscheidendere Frage ist, an welcher Stelle der Umlaufbahn das Raumschiff den notwendigen Kick in Richtung Mond bekommen soll, denn das System Erde-Mond ist nicht starr, sondern in ständiger Bewegung und die Gefahr ist groß, dass man den Mond verfehlt. Dieses klassische **Dreikörperproblem** lässt sich analytisch nicht lösen und erfordert daher den Einsatz einer Computersimulation, mit der die Lernenden spielerisch durch systematisches Probieren mögliche Flugbahnen zum Mond finden können. Dies ist Inhalt des Materials **M 3**. **Zu M 3**

Wie erzeugt man aber die extrem hohen Geschwindigkeiten, um zum Mond zu kommen?

In Zusammenhang mit dieser Frage ist ein kleiner Ausflug in die Fantasiewelt des französischen Schriftstellers Jules Verne reizvoll, der in seinem Roman „Von der Erde zum Mond" seine drei Raumfahrer mit einer gigantischen Kanone in Richtung Mond schießt. Bei der Überprüfung seiner Ideen auf physikalische Sinnhaftigkeit (**M 4**) stellt man schnell fest, dass ein Schuss zum Mond absolut tödlich enden würde und daher andere Antriebssysteme notwendig sind, womit der Raketenantrieb, der in den Materialien **M 5** bis **M 8** ausführlich thematisiert wird, gedanklich vorbereitet ist. Die Frage, ob es zur Erforschung des Mondes unbedingt notwendig ist, Menschen dorthin zu schicken, wird im Material **M 9** thematisiert. **Zu M 4** **Zu M 5 bis M 8** **Zu M 9**

[2] Interessierten und fachlich besonders guten Schüler wird mit Material **M 11** aber eine mögliche Herleitung der Beschleunigungsfunktion und auch der Ziolkowskiformel angeboten.

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt, LEK = Lernerfolgskontrolle

1./2. Stunde

Thema:	**Einstieg in das Thema Mond**
M 1 (Ab)	**Der Erde entkommen – die erste kosmische Geschwindigkeit**
M 2 (Ab)	**Der Erde entkommen – die zweite kosmische Geschwindigkeit**
Kompetenzen:	Bekanntes Wissen in neuen Zusammenhängen anwenden, Umgang mit Formeln, konkrete Berechnungen, Anwenden einer Computersimulation, Bewerten von Ergebnissen
Benötigt:	☐ Taschenrechner, Formelsammlung, Computer für Simulation *umlauf.exe*
Inhalt:	Herleitung der ersten und zweiten kosmischen Geschwindigkeit, konkreter Bezug zur Raumfahrt zum Mond durch konkrete Berechnungen

3./4. Stunde

Thema:	**Klassische Mechanik**
M 3 (Ab)	**Die Flugbahn zum Mond – ein Dreikörperproblem**
Kompetenzen:	Das System Erde-Mond als dynamisches Konstrukt verstehen
Benötigt:	☐ Computer für Simulation *Apollo.exe*
Inhalt:	Die Flugbahn zum Mond mithilfe einer Computersimulation experimentell erkunden und nachvollziehen

5./6. Stunde

Thema:	**Exkurs in die Literatur zu Jules Verne**
M 4 (Ab)	**Jules Verne und der Flug zum Mond**
Kompetenzen:	Einordnung und Beurteilung eines fiktionalen Textes (fantastische Literatur) unter physikalischen Gesichtspunkten
Inhalt:	Textausschnitte und grafische Darstellungen aus Jules Vernes Roman „Von der Erde zum Mond" werden physikalisch hinterfragt

7.–10. Stunde

Thema:	**Raketenphysik**
M 5 (Ab)	**Beschleunigung und Geschwindigkeit einer Rakete**
Kompetenzen:	Bewegungsgesetze verstehen und anwenden unter der Voraussetzung einer abnehmenden Masse des beschleunigten Körpers, Umgang mit Mathematik-Software
Inhalt:	Beschleunigungsfunktion einer Rakete, Ermittlung der Endgeschwindigkeit durch Flächenberechnung mit einer Mathematik-Software

M 6 (Ab) **Mit einer einstufigen Rakete den Weltraum berühren**
Kompetenzen: Bekanntes Wissen in neuen Zusammenhängen anwenden, Umgang mit Formeln, konkrete Berechnungen, Bewerten von Ergebnissen
Benötigt: ☐ Taschenrechner und Computer mit Mathematiksoftware (GeoGebra)
Inhalt: Beschleunigungsfunktion und Endgeschwindigkeit einer einstufigen Rakete ermitteln, Bezug zur Raumfahrtgeschichte: Redstone-Mercury-Rakete, mit der Alan Shepard als erster Amerikaner den Weltraum berührte

M 7 (Ab) **Saturn V – die Superrakete**
Kompetenzen: Informationen aufnehmen
Benötigt: ☐ Daten und Abbildung
Inhalt: Daten und Abbildung der Saturn-V-Rakete

M 8 (Ab) **Mit der Superrakete zum Mond**
Kompetenzen: Bekanntes Wissen in neuen Zusammenhängen anwenden, Umgang mit Formeln, konkrete Berechnungen, Bewerten von Ergebnissen
Benötigt: ☐ Taschenrechner und Computer mit Mathematiksoftware (GeoGebra)
Inhalt: Berechnung und Ermittlung der Beschleunigungsfunktionen und Brennschlussgeschwindigkeiten der Rakete nach Abschalten der einzelnen Stufen,
Bezüge herstellen zur Kreisbahngeschwindigkeit und Entweichgeschwindigkeit aus Material **M 1**

11./12. Stunde

Thema: **Internetrecherche und Lernerfolgskontrolle sowie Exkurs für Experten**
M 9 (Ab) **Lunochod – ein fahrbares Labor auf dem Mond**
Kompetenzen: Rechercheauftrag
Benötigt: ☐ Text
Inhalt: Informationen zum ersten fahrbaren, ferngesteuerten Mond-Rover der damaligen Sowjetunion

M 10 (LEK) **Lernerfolgskontrolle**
Kompetenzen: Bekanntes Wissen in neuen Zusammenhängen anwenden, Umgang mit Formeln, konkrete Berechnungen, Bewerten von Ergebnissen, Erklären von physikalischen Zusammenhängen
Benötigt: ☐ Taschenrechner und Computer mit Mathematiksoftware (GeoGebra)
Inhalt: Berechnung der kosmischen Geschwindigkeiten für den Mond, Dynamik des Systems Erde-Mond, Berechnung und Ermittlung von Beschleunigung und Endgeschwindigkeit einer Wasserrakete

M 11 (Ab) **Für Experten: eine Herleitung der Raketenformel**

M 1 Der Erde entkommen – die erste kosmische Geschwindigkeit

Einleitung

Am 21. Juli 1969 betraten erstmals Menschen den Mond. Die Reise dorthin wurde durch eine der größten und stärksten Trägerraketen ermöglicht, die jemals gebaut wurden.

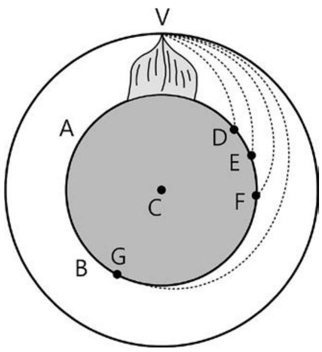
Die riesige, dreistufige Saturn-V-Rakete brachte die Astronauten zunächst in eine Erdumlaufbahn. Nach anderthalb Erdumkreisungen wurde dann die dritte Raketenstufe erneut gezündet, um das Apollo-Raumschiff auf den Kurs in Richtung Mond zu bringen.

© wikihow/Chris Hadley – www.wikihow.com

In diesem und im folgenden Arbeitsblatt geht es um die Frage, welche Geschwindigkeiten die Raketentriebwerke einem Raumschiff mitgeben müssen, um eine Erdumlaufbahn einzuleiten und von dort dann im Gravitationsfeld der Erde bis zum Mond aufzusteigen.

1. Die Erdumlaufbahn – ein unendliches Fallen um die Erde

Sir Isaac Newton wird manchmal als „Einstein des 17. Jahrhunderts" bezeichnet – zu Recht, denn sein Verständnis vom Wesen der Gravitation war überragend. Der folgende Ausschnitt aus seinen „Mathematischen Principien der Naturlehre[3]" von 1686 mag dies verdeutlichen. Newton beschreibt darin die Flugbahn eines Steins, der von einem sehr hohen Berg horizontal weggeschleudert wird. Lesen Sie die Textstelle und erklären Sie, wie Newton die Entstehung einer Erdumlaufbahn physikalisch begründet.



© Wikimedia Commons (gemeinfrei)

> *„Ein geworfener Stein wird, indem ihn seine Schwere antreibt, vom geradlinigen Wege abgebogen und fällt, indem er in der Luft eine krumme Linie beschreibt, zuletzt auf die Erde. Wird er mit größerer Geschwindigkeit geworfen, so geht er weiter fort und durch weitere Vergrößerung derselben könnte es geschehen, dass er einen Bogen von 1, 2, 5, 10, 100, 1000 Meilen beschriebe. Auf diese Weise wird derselbe endlich, wenn die Geschwindigkeit stets vergrößert wird, über den ganzen Umfang der Erde fortgehen und zu dem Berge, von welchem er geworfen worden ist, zurückkehren."*

[3] Sir Isaac Newton, „Über das Weltsystem" in Mathematische Principien der Naturlehre, erste Ausgabe 1686, deutsche Übersetzung 1872

M 2 Der Erde entkommen – die zweite kosmische Geschwindigkeit

Dem Gravitationsfeld der Erde entkommen – die Entweichgeschwindigkeit

Um im Gravitationsfeld der Erde von einer Umlaufbahn (Parkbahn) bis zur Mondbahn aufsteigen zu können, müssen die Triebwerke der Rakete für einen erheblichen Geschwindigkeitszuwachs sorgen. Die Zündung der Triebwerke (Einleitung der „Wurfbewegung“ zum Mond) erfolgte bei Apollo 11 in einer Höhe von 190 km und endete bei 334 km. Die Flugbahn zum Mond wurde damals so berechnet, dass sie deutlich über die Entfernung der Mondbahn, die im Juli 1969 etwa 395 000 km betrug, hinausging. Die Gravitation des Mondes sollte das Raumschiff „einfangen“, sobald es den Mond passierte. Erst dann sollten die Bremstriebwerke aktiv werden, um in eine Mondumlaufbahn einschwenken zu können. Die Geschwindigkeit des Raumschiffs nach dem Brennschluss der Triebwerke in einer Höhe von 334 km über der Erde betrug ziemlich genau 39 000 km/h.

1. **Die Simulation:**
   Verwenden Sie wieder das Simulationsprogramm *umlauf.exe*. Starten Sie die Wurfbewegung aus einer Höhe von 334 km mit einer Geschwindigkeit von 39 000 km/h und ermitteln Sie den maximalen Abstand der Bahnkurve von der Erde (Apogäum). Diese Entfernung wäre vom Apollo-Raumschiff erreicht worden, hätte es den Mond verfehlt.

2. **Die Theorie:**
   Die Brennschlussgeschwindigkeit von 39 000 km/h liegt nur knapp unter der Entweichgeschwindigkeit, mit der man das Gravitationsfeld der Erde vollständig verlassen könnte – also theoretisch ins Unendliche driften würde, wenn man die Erde als einzigen gravitativ wirkenden Himmelskörper annähme. Diese sogenannte zweite kosmische Geschwindigkeit oder Fluchtgeschwindigkeit sollen Sie im Folgenden herleiten und berechnen.

   a) Der Ansatz lautet: Die kinetische Energie, die das Raumschiff nach dem Brennschluss der Triebwerke bekommen hat, wird vollständig in die Hubarbeit umgesetzt, die erforderlich ist, um ins Unendliche zu kommen. Es gilt also: $W_{kin} = W_{Hub}$. Die Hubarbeit (Verschiebearbeit), um eine Masse m im Gravitationsfeld der Masse M vom Abstand r_1 zum Abstand r_2 zu schieben, lässt sich mit der Formel

   $$W_{Hub} = G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

   berechnen. Leiten Sie nun her: Die gesuchte Abschussgeschwindigkeit ergibt sich aus:

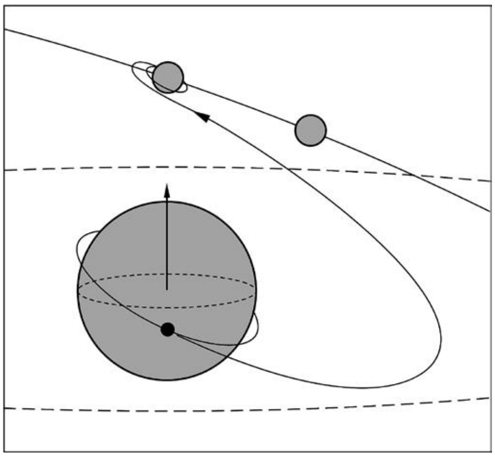
   $$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Erde}}{r_1}}.$$

   Tipp:
   Lassen Sie r_2 an geeigneter Stelle gegen unendlich laufen.

   b) Apollo 11 hatte nach Brennschluss der Triebwerke der dritten Stufe eine Höhe von 334 km erreicht. Welche Geschwindigkeit müsste das Raumschiff an diesem Ort aufweisen, um von dort dem Gravitationsfeld der Erde vollständig zu entkommen? Rechnen Sie mit der Formel aus Aufgabe 2.a.

   c) Die Brennschlussgeschwindigkeit von Apollo 11 von 39 000 km/h lag nur knapp unter der Entweichgeschwindigkeit (s. 2b). Geben Sie den Unterschied in Prozent an.

Die Flugbahn zum Mond – ein Dreikörperproblem M 3



Eine exakte Berechnung der Flugbahn zum Mond ist schwierig, denn der Mond bleibt nicht an der Stelle, die er beim Abschuss der Rakete hatte, sondern bewegt sich während des Flugs um ein beträchtliches Stück weiter. Es müsste ein sogenanntes Dreikörperproblem gelöst werden, denn Erde, Mond und Raumschiff treten gravitativ miteinander in eine dynamische Wechselwirkung. Da eine mathematisch-analytische Lösung für dieses Problem nicht mehr möglich ist, bieten Computersimulationen mit iterativen Algorithmen eine gute Alternative zur Berechnung von Flugbahnen im Einflussbereich verschiedener Gravitationsfelder.

Das Programm *apollo.exe*[5] ermöglicht die Simulation einer Flugbahn zum Mond, wobei aus einer niedrigen Erdumlaufbahn (190 km über der Erdoberfläche) durch Zünden der Triebwerke Geschwindigkeit aufgenommen werden kann, um sich von der Erde zu entfernen. Den Ort der Triebwerkszündung auf der Umlaufbahn und die Geschwindigkeit nach Brennschluss der Triebwerke können variiert werden.

Aufgaben

1. Starten Sie das Simulationsprogramm *apollo.exe* und machen Sie sich mit dessen Funktionen vertraut. Lesen Sie auch die Info-Box zum Programm.
2. Die Startparameter sind so eingestellt, dass eine freie Rückkehrbahn zur Erde ermöglicht wird. Solche Rückkehrbahnen („Slingshots“) waren während der Mondflüge der Apollomissionen eingeplant, sollte eine Mondlandung wegen technischer Probleme nicht möglich sein. Bei der Mission von Apollo 13 musste eine solche Rückkehrbahn tatsächlich eingesetzt werden, da eine Explosion eines Sauerstofftanks kurz vor Erreichen des Mondes eine Landung auf dem Erdtrabanten unmöglich werden ließ.
   a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie eine solche freie Rückkehrbahn funktioniert.
   b) Drucken Sie eine typische Bahnkurve aus (Screenshot) und kleben Sie das Bild in Ihre Ausarbeitung. Notieren Sie dazu die folgenden Flugparameter, die Sie mithilfe des Programms ermitteln können:
      – die Brennschlussgeschwindigkeit für den Schuss zum Mond (translunar injection),
      – die ungefähre Geschwindigkeit im Bereich der Mondbahn,
      – die Zeitdauer in Tagen und Stunden für den Flug zum Mond.
3. Experimentieren Sie mit verschiedenen Parametereinstellungen und drucken Sie einige Ergebnisse aus. Notieren Sie auch dazu die entsprechenden Parametereinstellungen.

[5] http://www.mabo-physik.de/mondflug.html

M 5 Beschleunigung und Geschwindigkeit einer Rakete

© Stocktrek Images/Getty Images Plus

Der Raketenantrieb basiert auf dem Prinzip des Rückstoßes (Impulserhaltung). Treibgase verlassen die Triebwerksdüsen mit hoher Geschwindigkeit und erzeugen dadurch eine konstante Schubkraft, wodurch die Rakete während der Brenndauer der Triebwerke ständig beschleunigt wird. Diese Beschleunigung ist allerdings nicht konstant – vielmehr sorgt die abnehmende Raketenmasse durch das Verbrennen des Treibstoffs für einen stetigen Anstieg der Beschleunigungswerte. Die Formel für diese zeitabhängige Beschleunigung lautet[10]:

$$a(t) = \frac{D \cdot v_{TR}}{M_{Start} - D \cdot t}.$$

Die Größe D heißt Durchsatz. Diese für ein Triebwerk charakteristische Konstante beschreibt, wie viel Treibstoffmasse pro Sekunde ausgestoßen wird. Es gilt also:

$$D = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Die Ausstoßgeschwindigkeit der Treibgase wird mit v_{TR} bezeichnet und ist ebenfalls konstant. M_{Start} ist die Masse der Rakete mit gefüllten Treibstofftanks. Die Beschleunigungsformel zeigt, dass mit zunehmender Zeit die Gesamtmasse der Rakete linear abnimmt, der Nenner des Bruchs also kleiner wird und die Beschleunigung dadurch wächst.

Ein konkretes **Beispiel** soll zeigen, wie sich die Beschleunigung mit der Zeit typischerweise entwickelt:

Eine einstufige Rakete hat die Gesamtmasse von 280 000 kg, wovon 220 000 kg Treibstoff sein sollen. Die Raketentriebwerke erzeugen eine Treibgasgeschwindigkeit von v_{TR} = 2500 m/s. Brennschluss ist nach 80 Sekunden – dann ist der gesamte Treibstoff verbraucht.

So geht´s:

Der Durchsatz ist:

$$D = \frac{M_{TR}}{T_{Brenn}} = \frac{220\,000\ \text{kg}}{80\ \text{s}} = 2750\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Die Beschleunigung entwickelt sich im Laufe der Zeit nach der Formel:

$$a(t) = \frac{D \cdot v_{TR}}{M_{Start} - D \cdot t} = \frac{2750\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 2500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{280\,000\ \text{kg} - 2750\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot t} = \frac{6\,875\,000\ \text{N}}{280\,000\ \text{kg} - 2750\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot t}.$$

[10] Eine Herleitung für diese Formel finden Sie in Material **M 11**.

M 6 Mit einer einstufigen Rakete den Weltraum berühren

Juri Gagarin
Wikimedia Commons (gemeinfrei)

Alan Shepard
© NASA

Am 12. April 1961 umrundete der sowjetische Kosmonaut Juri Gagarin als erster Mensch im Weltall die Erde und verbrachte über 100 Minuten in der Schwerelosigkeit. Die amerikanische Raumfahrt hinkte zur damaligen Zeit der sowjetischen deutlich hinterher. Nach vielen Fehlschlägen schafften es die USA, ihren Astronauten Alan B. Shepard am 5. Mai des gleichen Jahres ebenfalls ins Weltall zu befördern. Allerdings streifte dieser Flug mit seiner parabelförmigen Bahn nur kurz den luftleeren Raum in einer Höhe von 185 km. Bereits nach 15 Minuten Flugzeit kehrte Alan Shepard wohlbehalten wieder auf die Erde zurück. Für eine Erdumlaufbahn hätte eine wesentlich höhere Endgeschwindigkeit erreicht werden müssen, was mit einer einstufigen Rakete kaum möglich ist. Für die Entwicklung der amerikanischen Raumfahrt war dieser kurze Flug dennoch ein wichtiger Meilenstein.

Die Rakete, welche die Astronautenkapsel Shepards ins Weltall beförderte, war eine einstufige Mercury-Redstone-Rakete. Der Treibstoff bestand aus Ethanol und flüssigem Sauerstoff.

Im Folgenden sollen Sie die Beschleunigungsdynamik und die Endgeschwindigkeit dieser Rakete berechnen.

Einige Daten der Redstone-Mercury-Rakete:

Startmasse: $M_{Start} = 29\ 886\ \text{kg}$

davon Treibstoff: $M_{TR} = 23\ 800\ \text{kg}$

Austrittsgeschwindigkeit der Treibgase: $v_{TR} = 2110\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Brenndauer der Triebwerke: T = 141 Sekunden.

Da eine solche Rakete nicht in der Schwerelosigkeit startet, sondern im Schwerefeld der Erde nach oben steigt, wirkt die Erdbeschleunigung der Triebwerksbeschleunigung kontinuierlich entgegen. Die Erdbeschleunigung nimmt mit zunehmender Höhe jedoch ab und die Neigung der Rakete gegenüber der Vertikalen nimmt zu. Ein gemittelter konstanter Wert, der diese Effekte im konkreten Beispiel berücksichtigt, liegt bei 80 % der Erdbeschleunigung. Für die Beschleunigung der Rakete gilt somit die folgende Formel:

$$a(t) = \frac{D \cdot v_{TR}}{M_{Start} - D \cdot t} - k \cdot g\text{, wobei gilt:}$$

$$k = 0{,}8 \ \text{ und } \ g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Orientieren Sie sich bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben am Beispiel aus Material **M 5**.

Mit der Superrakete zum Mond

M 8

„Twelve, eleven, ten, nine … ignition sequence starts … six, five, four, three, two, one, zero … All engines running. Liftoff! We have a liftoff … 32 minutes past the hour, liftoff on Apollo 11. Tower clear."

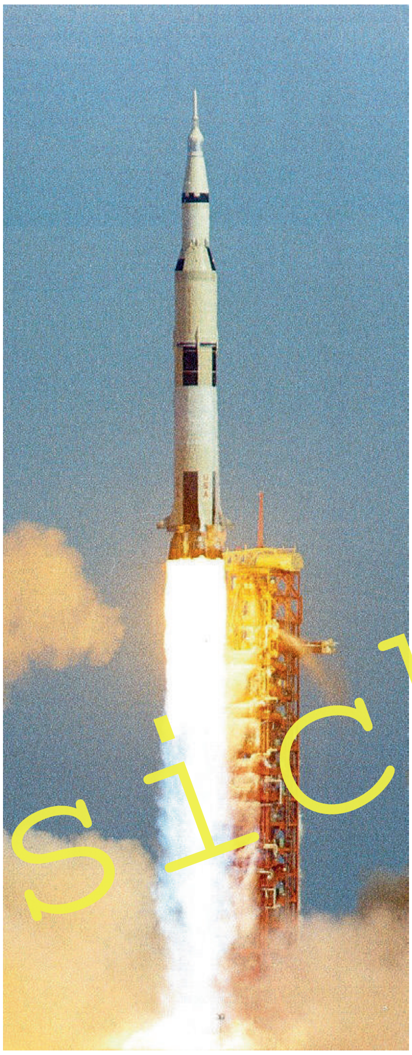
Zunächst langsam und träge, dann aber mit enorm ansteigender Beschleunigung und Geschwindigkeit erhebt sich die mächtige Saturn-V-Rakete auf einem gigantischen Feuerstrahl reitend gen Himmel. Kaum zu glauben, dass dieser Koloss die Astronauten mit einer Geschwindigkeit von fast 40 000 km/h in Richtung Mond befördern soll.

Ermöglicht wurde dies vor allem durch das Stufenprinzip der Rakete. Im Folgenden sollen Sie die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der einzelnen Raketenstufen ermitteln, wobei Ihnen die Daten aus Material **M 7** zur Verfügung stehen.

In **M 6** haben Sie gelernt, dass sich die Endgeschwindigkeit einer Rakete berechnen lässt, indem man die Fläche unter der Beschleunigungskurve innerhalb der Brenndauer der Triebwerke ermittelt. Dies lässt sich mithilfe einer Mathematiksoftware, eines grafikfähigen Taschenrechners oder der Integralrechnung bewerkstelligen.

Die Kurve der Beschleunigung folgt der Funktion:

$$a(t) = \frac{D \cdot v_{TR}}{M - D \cdot t} - k \cdot g \, .$$



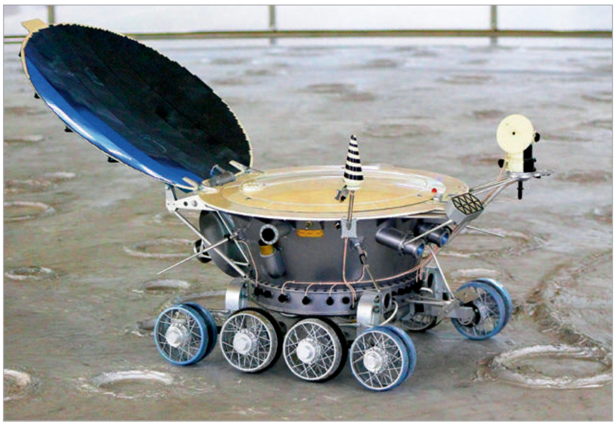
© Wikimedia Commons (gemeinfrei)

Dabei ist D der sogenannte Durchsatz, der sich aus der Treibstoffmasse berechnet, die innerhalb der Brenndauer der Triebwerke verbrannt wurde. M ist die Masse der Rakete, die sie vor Zünden der Triebwerke einer bestimmten Stufe hatte. Da die Rakete zu Beginn fast senkrecht, dann aber immer flacher fliegt, wird ihre Beschleunigung durch die Erdanziehung unterschiedlich stark reduziert. Dies wird durch den Term $k \cdot g$ mit $g = 9{,}81 \, \frac{m}{s^2}$ berücksichtigt.

Der Weg zum Mond wies die folgenden Etappen auf: Die Zündung der ersten Stufe brachte die gewaltige Masse der Rakete in eine Höhe von etwa 44 km. Nach dem Abtrennen dieser Stufe wurde die zweite Stufe gezündet, welche das Raumschiff bereits fast in die Höhe der Erdumlaufbahn katapultieren konnte. Auch diese zweite Stufe wurde abgetrennt. Die dritte Stufe wurde zweimal gezündet. Der erste Schub der Triebwerke schoss die Rakete auf die Erdumlaufbahn, eine Parkbahn in einer Höhe von 190 km. Erst nach etwa eineinhalb Erdumrundungen wurden dann die Triebwerke erneut angeworfen – diesmal aber so lange, bis die Entweichgeschwindigkeit erreicht wurde, die den Aufstieg zur Bahn des Mondes ermöglichte.

Lunochod – ein fahrbares Labor auf dem Mond

M 9



© Wikimedia Commons CC BY-SA 3.0

Im Jahre 1969 brachte Apollo 11 die ersten Menschen auf den Mond, was weltweit einen gewaltigen Medienrummel auslöste. Infolgedessen fand ein bemerkenswertes Mondprogramm der damaligen Sowjetunion in der westlichen Öffentlichkeit kaum Beachtung, obwohl es aus wissenschaftlicher Sicht sehr erfolgreich und technisch nahezu perfekt durchgeführt worden war. Eine zentrale Rolle spielte dabei ein unbemanntes, fahrbares Labor, das im November 1970 auf der Mondoberfläche abgesetzt wurde. Das achträdrige Gefährt, das aussah, als wäre es einem Roman von Jules Verne entstiegen, trug den Namen *Lunochod 1* und legte viele Kilometer auf der Mondoberfläche zurück. Dabei sendete der Rover über 20 000 Bilder zur Erde und führte umfangreiche Analysen der Mondmaterie durch. Die elektrische Energie für die Motoren stammte aus Akkumulatoren, die durch Solarzellen aufgeladen wurden. Die Sensoren und Analysegeräte durften während der eisigen Mondnächte (Temperaturen von bis zu –150 °C) nicht zu Schaden kommen. Immerhin dauert eine Mondnacht gute zwei Wochen. Daher wurde das Innere von Lunochod mit einer Radionuklid-Heizung warm gehalten. Als Nuklid wurde dafür Polonium-210 verwendet, das eine extrem hohe Aktivität besitzt und schon bei kleinsten Mengen eine hohe Heizleistung garantiert. Die geringe Halbwertszeit dieses Alphastrahlers ($T_H = 138$ Tage) stellte kein Problem dar, weil die Mondmission sowieso nur für einige Monate geplant war.

Aufgaben

1. Informieren Sie sich im Internet über die beiden Mond-Rover *Lunochod 1* und *Lunochod 2* der damaligen Sowjetunion und notieren Sie einige Punkte, wie z. B.
   – Antrieb und Stromversorgung,
   – wissenschaftliche Geräte und Experimente,
   – Heizung der Instrumente,
   – Fahrtstrecken (in Kilometern),
   – Dauer der Missionen.
2. Die bemannten Mondlandungen der Amerikaner werden auch kritisch gesehen, da es aus wissenschaftlicher Sicht nicht unbedingt notwendig war, dass Menschen den Mond betreten. Das russische Lunochodprogramm konnte zeigen, dass auch ein ferngesteuertes Labor in der Lage war, wertvolle wissenschaftliche Erkenntnisse zu gewinnen.
   Nehmen Sie Stellung zu diesen Argumenten und formulieren Sie einen eigenen Standpunkt zu der Frage, ob es sinnvoll und zielführend ist, dass Menschen den Mond betreten, und äußern Sie sich allgemein zur Sinnhaftigkeit der bemannten Raumfahrt.

Hinweise (M 1+M 2)

Die erste und die zweite kosmische Geschwindigkeit sind eigentlich so definiert, dass der Flugkörper vom Erdboden aus startet. Dies führt bei der ersten kosmischen Geschwindigkeit allerdings zu einer Kreisbahn, die quasi am Erdboden verläuft, was praktisch nicht möglich ist. Die Berechnungen in Material **M 1** beziehen sich auf eine Kreisbahn in einer Höhe von 190 km, was in etwa der Umlaufbahn der Apollo-11-Kapsel entspricht. Für die Starthöhe in Material **M 2** wurden 334 km gewählt, denn dies stimmt mit der Höhe von Apollo 11 nach Brennschluss der dritten Stufe überein.
Allgemein wurde bei allen Aufgaben der Materialien, in denen der Erdradius verlangt wird, der Radius des Äquators (6378 km) verwendet und nicht der mittlere Erdradius von 6371 km, denn die Startorte der Weltraumraketen (Mercury-Redstone, Saturn V) lagen nahe am Äquator.

Erwartungshorizont (M 1)

1. Ein Stein, der waagerecht geworfen wird, fällt auf den Boden. Wenn dieser sich aber unter der Wurfbahn wegkrümmt, kann es passieren, dass der Stein bei einer bestimmten Abwurfgeschwindigkeit um die Erde herumfällt. Eine Erdumlaufbahn stellt somit eigentlich eine Fall- bzw. eine Wurfbewegung dar.
2. b) Eine fast perfekte Kreisbahn in einer Höhe von 190 km ergibt sich bei einer Abwurfgeschwindigkeit von
   $v = 28\,048 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7791 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

   c) Beispiele:
   Je höher die Umlaufbahn, desto geringer die Umlaufgeschwindigkeit. Ein solches Verhalten wird auch als „Kepler-Rotation" bezeichnet (vgl. Tabelle).

Höhe in km	Geschwindigkeit (m/s)
1	7906
100	7845
500	7614
1000	7351

3. a) Die Gravitationskraft wirkt als Zentripetalkraft, daher gilt:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot m \cdot M_{Erde}}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_{Erde}}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Erde}}{r}} \, .$$

   b) $$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Erde}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}}{\left(6378 \cdot 10^3 + 190 \cdot 10^3\right)}} \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7791{,}2 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 28\,048{,}32 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

   Dieser Wert stimmt sehr gut mit der Simulation überein.

   c) $$v_{1.kosm} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Erde}}{r_{Erde}}} = \sqrt{\frac{6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}} \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7906{,}4 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 28\,463 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Erwartungshorizont (M 2)

1. Mithilfe der Simulation ergibt sich eine maximale Entfernung von etwa 547 184 km.
2. a) Die kinetische Energie, die im Abstand r_1 vom Mittelpunkt der Erde durch die Triebwerke erzeugt wurde, wird vollständig in die Hubarbeit umgesetzt, um die Masse m bis zum Abstand r_2 zu schieben. Daher gilt:

$$W_{kin} = W_{Hub} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = G \cdot m \cdot M_{Erde} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_{Erde} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$