

II.A.26

Mechanik

Von der Kreisbewegung zur Schwingung – Grundbegriffe und Formeln

Mona Hitznauer



© RAABE 2025

© RyanLane/E+

In dieser Einheit wiederholen die Lernenden die Grundbegriffe und Formeln zu den beiden wichtigen Themengebieten „Kreisbewegungen“ und „Schwingungen“. Sie finden eine Formel für die Zentripetalkraft und vergleichen Einflussgrößen von Kreisbewegungen und ungedämpften, harmonischen Schwingungen. Mithilfe anschaulicher Animationen lernen die Schülerinnen und Schüler, Schwingungen mathematisch zu beschreiben und sie interpretieren Diagramme unterschiedlicher schwingungsfähiger Systeme.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12

Dauer: 5–7 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: Die Lernenden formulieren ausgehend von Alltagserfahrungen und physikalischen Vorkenntnissen Hypothesen zur Abhängigkeit der Zentripetalkraft von verschiedenen Größen, sie interpretieren Diagramme zu verschiedenen schwingungs-fähigen Systemen anhand ihrer charakteristischen Größen.
gleichmäßige Kreisbewegungen, Frequenz, Periodendauer, Winkelgeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit, Zentripetalkraft, Scheinkraft, Gewichtskraft, harmonische, ungedämpfte Schwingungen, Federpendel, Kreisfrequenz, Amplitude

Medien: GeoGebra, Taschenrechner, Texte, Fotos, Diagramme, Internet

Schwingungen – Grundlagen und Begriffe

M 1



Schwingungen begegnen uns an vielen Stellen im Alltag: bei der Kinderschaukel, bei Pendeluhrn oder bei den Saiten einer Gitarre. Bei diesen sogenannten mechanischen Schwingungen führt ein Körper in einem physikalischen System eine (zeitlich gesehen) periodische Bewegung um eine Gleichgewichtslage herum aus. Nach bestimmten Zeiten befindet sich der Körper immer wieder am selben Ort und im selben Bewegungszustand. Die Punkte, in denen die Bewegung die Richtung ändert, nennt man Umkehrpunkte.

Für ein ausreichendes Verständnis ist es wichtig, die grundlegenden Begriffe zu kennen und diese interpretieren zu können. Die folgenden Begriffe sind elementar:

Begriffsklärung:

Physikalischer Körper:

Ein physikalischer Körper besteht aus Materie und besitzt eine Masse sowie ein Volumen.

Physikalische Systeme:

Physikalische Systeme sind eine Ansammlung von wechselwirkenden Körpern, die sich in ihrer Umgebung abgrenzen lassen.

Periodisch:

Sich wiederholende Vorgänge nennt man periodisch.

Gleichgewichtslage:

Unter einer Gleichgewichtslage (auch Ruhelage) eines schwingenden Körpers versteht man die Lage, in der der Körper in Ruhe verweilen kann.

Bewegungszustand:

Ein Körper ändert seinen Bewegungszustand, wenn sich seine Geschwindigkeit und/oder die Richtung seiner Geschwindigkeit verändern.

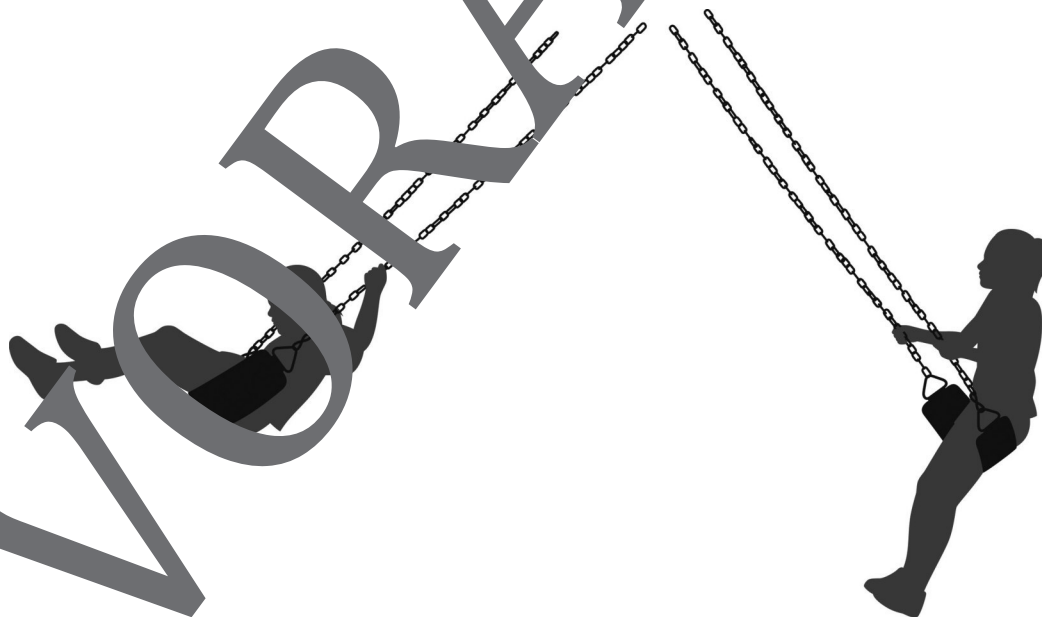
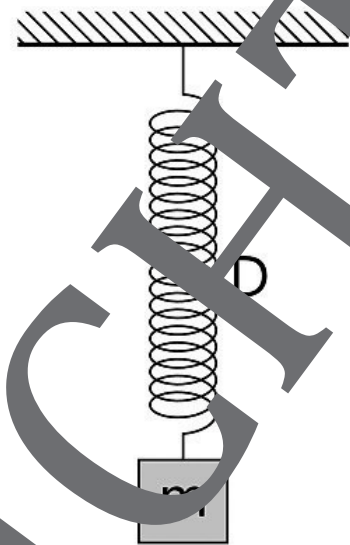


Abbildung: JakeOlimb/DigitalVision Vectors

Paradebeispiel einer Schwingung – das Federpendel

Ein Federpendel besteht aus einer schraubenförmigen Sprungfeder mit der Federhärte D , die an einem Ende fixiert ist und an deren anderem Ende eine Masse m befestigt ist. In Ruhe, also ohne Einwirkung von äußeren Kräften, hängt das Federpendel bewegungslos nach unten, die Masse befindet sich im Kräftegleichgewicht (Ruhelage). Lenkt man es senkrecht um eine **Strecke** s aus, beginnt es auf- und abzuspringen.

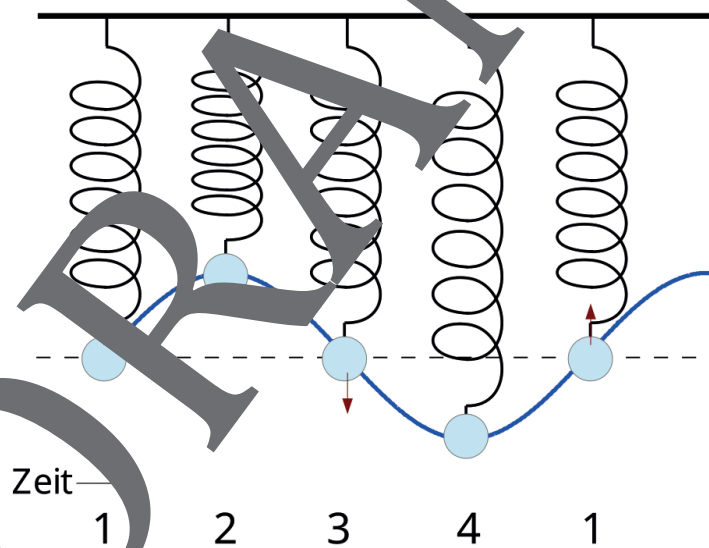
Das reale Federpendel und seine Schwingung kann man zum **idealen** Federpendel vereinfachen und damit leichter mathematisch modellieren.



Skizze von Anna Hitznauer

Annahmen für eine mathematische Modellierung:

- Die Masse ist punktförmig.
- Die Schraubenfeder hat keine Masse und kein Volumen.
- Das Pendel schwingt ausschließlich auf und ab, senkrecht zum Erdboden.
- Alle Reibungen (auch der Luftwiderstand) werden vernachlässigt.
- Die anfängliche Auslenkung s der Masse ist senkrecht zum Erdboden und klein.



Quelle: wikipedia, Creative-Commons-Lizenz CC0 1.0

Federpendel – Animation und Aufgaben

M 2

Aufgaben

1. Betrachten Sie für die folgende Aufgabe die Animation über den Link <https://raabe.click/Federpendel>, über den nebenstehenden QR-Code oder über die beigegefügte Datei M2.ggb. Fünf Lerngruppen (A–E) haben versucht, ein ideales Federpendel zu animieren. Die sich auf- und abbewegenden Massenpunkte sind als Punkte dargestellt, die Feder als Spirale. Der Boden ist mit einer durchgezogenen Linie gekennzeichnet.
 - a) Beschreiben Sie qualitativ (in einfachen Worten) für jede Animation die Geschwindigkeit des Massenpunkts in drei Zeitpunkten: in den beiden Umkehrpunkten und in der jeweiligen Ruhelage.

	oben	Mitte	unten
A			
B			
C			
D			
E			

- b) Ermitteln Sie, welche Lerngruppe das ideale Federpendel korrekt animiert hat. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie auf die Geschwindigkeiten des Massenpunkts im Zeitverlauf Bezug nehmen.
- c) Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die Schwingung des idealen Federpendels verändern würde, wenn ...
 1. der Massenschwerpunkt nicht in der Mitte der Masse liegt.
 2. die Reibung nicht vernachlässigt wird.
 3. die anfängliche Auslenkung nicht senkrecht zum Erdboden ist.
- d) Nennen Sie die Einflussgrößen, von denen die Schwingung eines idealen Federpendels abhängt.
- e) Erläutern Sie, was beim idealen Federpendel passieren würde, wenn die anfängliche Auslenkung nicht nach unten, sondern nach oben groß ist.
- f) Die Bewegung eines Kindes auf einer Schaukel wird mit dem Modell des idealen Federpendels beschrieben. Begründen Sie, dass dieses Modell eher ungeeignet ist. Unter welchen Umständen wäre das Modell aussagekräftig?

M 3

Wiederholung: gleichmäßige Kreisbewegung

Gleichmäßige Kreisbewegung

Eine Bewegung heißt gleichmäßige Kreisbewegung, wenn sie die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn beschreibt und sich die Bahngeschwindigkeit v (Betrag des Geschwindigkeitsvektors) nicht ändert.

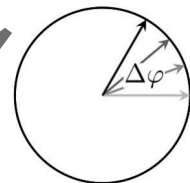
Die **Umlaufzeit T** ist die Zeitspanne, die ein Körper auf der Kreisbahn für eine Umrundung benötigt. Ihr Kehrwert ist die **Frequenz f** mit der Einheit Hertz.

$$f = \frac{1}{T} \text{ in Hz} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Winkelgeschwindigkeit ω

Die konstante **Winkelgeschwindigkeit ω** gibt an, welchen Winkel (Einheit: Bogenmaß) ein gedachter Zeiger pro Zeitintervall Δt überstreicht:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ in } \frac{\text{rad}}{s}$$



Skizze: Mona Hitzenauer

Hinweis: Oft wird „rad“ bei der Einheit weggelassen und ist dann identisch mit der Einheit der Frequenz. Allerdings ist Hertz (Hz) für die Frequenz reserviert. Der zurückgelegte Winkel in Abhängigkeit der Zeit ist demnach

$$\varphi(t) = \omega \cdot t \text{ in rad}$$

Bahngeschwindigkeit v

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die **Bahngeschwindigkeit v** . Sie ist der zurückgelegte Wegunterschied Δs pro Zeitintervall Δt . Es ergibt sich:

$$|\vec{v}| = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ in } \frac{m}{s}$$

Zentripetalkraft $\vec{F}_z$

Die Ursache einer Kreisbewegung ist die Zentripetalkraft $\vec{F}_z$. Diese wirkt immer zum Kreismittelpunkt bzw. Drehzentrum hin. Der Betrag der Zentripetalkraft ist:

$$|\vec{F}_z| = m \cdot |\vec{a}| = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$



Aufgaben zur Kreisbewegung

M 4

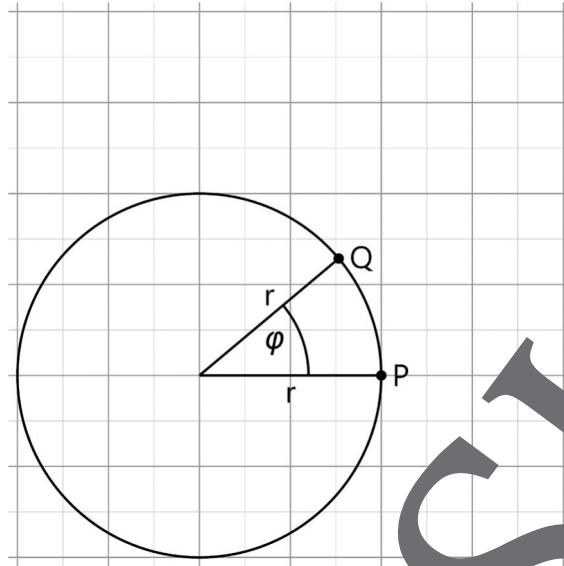
Aufgaben

1. Erklären Sie qualitativ, welche Bedeutung die Frequenz bei einer Kreisbewegung besitzt.
2. Leiten Sie die Formel $\omega = 2\pi \cdot f$ her, indem Sie eine volle Umdrehung betrachten.
3. Leiten Sie anschließend die Formel $|\mathbf{v}| = v = \omega \cdot r$ her, wenn r den Radius der Kreisbahn bezeichnet.
4. Im Kettenkarussell beschreibt die Bewegung eines Fahrgastes nach dem Erreichen der maximalen Fahrtgeschwindigkeit eine Kreislinie.
 - a) Erläutern Sie, welche Kräfte auf den Fahrgast wirken und geben Sie deren Richtungen an. Nennen Sie außerdem die resultierende Kraft und beschreiben Sie die Richtung des Kraftvektors.
 - b) Erläutern Sie, von welchen Größen der Betrag der ursächlichen Kraft abhängt.
 - c) Nennen Sie die auftretende Scheinkraft.



Foto: RyanJLane/E+

5. Eine Punktmasse m bewegt sich völlig reibungsfrei mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit v auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius r .
- a) Beschreiben Sie qualitativ, ob und wie sich der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ bzw. sein Betrag $|\vec{v}| = v$ während der Bewegung ändert.



Skizze: Mona Hitzenauer

- b) Skizzieren Sie in der Abbildung in den Punkten P und Q die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Tragen Sie dann den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ von P ebenfalls am Punkt Q an. Zeichnen Sie anschließend den Vektor $\Delta \vec{v}$ und den Vektor $\Delta \vec{s} \approx \overline{PQ}$ ein.
- c) Bestimmen Sie eine Formel für $|\Delta \vec{v}|$, indem Sie ähnliche Dreiecke identifizieren und den Strahlensatz anwenden.

Je kleiner der Abstand der Punkte P und Q wird, desto stärker nähert sich die Strecke $\overline{PQ}$ der Kreislinie – und damit $\Delta \vec{s}$ – an.

- d) Beschreiben Sie die Richtung von $\Delta \vec{v}$, wenn Δt sehr klein gewählt wird.
- e) Zeigen Sie, dass für den Betrag der Zentripetalkraft der Zusammenhang $f_z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ besteht, indem Sie die Formeln aus den Aufgaben 3 und 5c) verwenden.

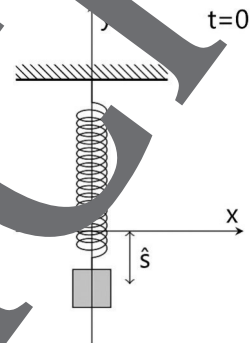
M 6

Harmonische Schwingungen beschreiben

Die Bewegung des Massenpunkts des idealen Federpendels ist eine **harmonische Schwingung**, daher ist das ideale Federpendel ein sog. harmonischer **Oszillator**. Schwingungen lassen sich mathematisch mithilfe von Bewegungsgleichungen modellieren. Die Gestalt der Bewegungsfunktion hängt von ihrer Modellierung ab, z. B. wie der Oszillator im Koordinatensystem liegt und zu welchem Zeitpunkt die Auslenkung aus seiner Ruhelage geschieht.

Die Abbildung zeigt ein ideales Federpendel im Koordinatensystem zum Zeitpunkt $t = 0$ seiner fänglichen Auslenkung $\hat{s}$ aus seiner Ruhelage (x -Achse). Die y -Achse ist seine Schwingungsachse.

Hinweis: Auslenkungen unter der Ruhelage haben mit dieser Modellierung ein negatives Vorzeichen. Lässt man das Federpendel nach der Auslenkung nach unten los, schwingt es auf und ab. Die untere Abbildung zeigt die Auslenkung des Massenpunkts zum Zeitpunkt t bzgl. seiner Ruhelage. Die Bewegung des Massenpunkts beschreibt über die Zeit t eine Kreisfunktion.



Skizzen: Mona Hitzenauer

Harmonische Schwingungen lassen sich mit Sinusfunktionen folgender Form beschreiben:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

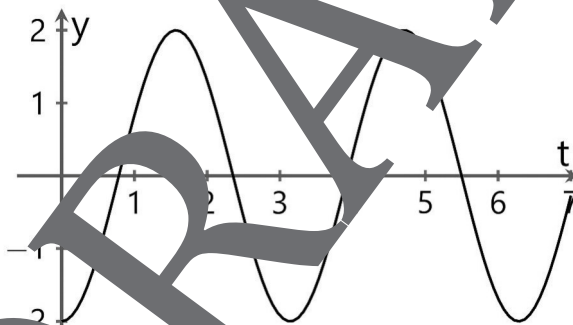
mit den Parametern:

$\hat{s}$: Amplitude

ω : Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit) mit $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Periodendauer der Schwingung ist.

φ_0 : Nullphasenwinkel, das heißt die Phase zum Zeitpunkt $t = 0$.

Das Argument der Sinusfunktion, $\omega t + \varphi_0$, heißt Phasenwinkel. Er gibt die aktuelle „Position“ im Ablauf der periodischen Schwingung wieder.



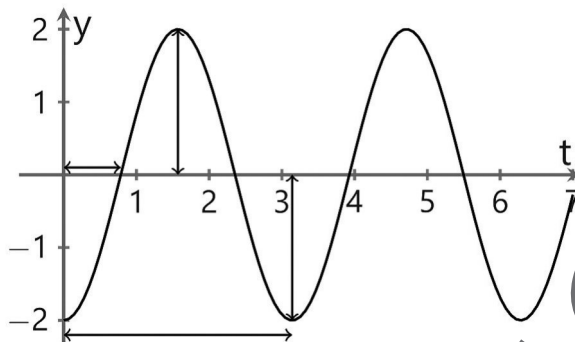
Skizzen: Mona Hitzenauer

Aufgaben zu harmonischen Schwingungen

M 7

Aufgaben

1. Aus der Mathematik kennen Sie die allgemeine Sinusfunktion y mit dem Term $y = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ und den Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
 - a) Vergleichen Sie die allgemeine Sinusfunktion mit der Funktion s mit $s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ und erläutern Sie, inwiefern die Parameter der Sinusfunktion die Werte der Funktion s beschreiben.
 - b) Beschriften Sie mit den Ergebnissen aus a) folgende Pfeile im Diagramm einer harmonischen Schwingung eines idealen Federpendels:



Skizze: Mona Hitznauer

Bestimmen Sie $\hat{s}$, ω , T und berechnen Sie den Term $\frac{\varphi_0}{\omega}$ der dargestellten Funktion, um φ_0 zu bestimmen. Stellen Sie anschließend die Bedeutung der Parameter im Sachzusammenhang einer harmonischen Schwingung.

c) Zusatzaufgabe

Beschreiben Sie Veränderungen des Versuchs bzw. des Federpendels, um

- (1) die Amplitude der Schwingungsfunktion zu vergrößern,
- (2) die Periodendauer zu verkürzen,
- (3) den Wert der Kreisfrequenz zu steigern.

Lösungen (M 2)

Aufgabe 1

a)

	oben	Mitte	unten
A	sehr langsam	mittel	schnell
B	schnell	sehr langsam	schnell
C	mittel	mittel	mittel
D	sehr langsam	mittel	sehr langsam
E	schnell	mittel	sehr langsam

- b) Die Lerngruppe D hat das ideale Federpendel animiert. Der Punkt D verhält sich wie eine Punktmasse eines idealen Federpendels, weil die Geschwindigkeit (genauer: der Betrag des Geschwindigkeitsvektors) in der Ruhelage maximal ist und von der Ruhelage zu den Umkehrpunkten hin immer langsamer wird. In den Umkehrpunkten ändert sich die Geschwindigkeit ihre Richtung und nimmt vom Betrag her wieder bis zur Ruhelage zu. Keiner der anderen Punkte zeigt dieses Geschwindigkeitsverhalten.
- c) In den beschriebenen Fällen liegt kein ideales Federpendel mehr vor. Die Schwingung des Federpendels für die einzelnen Fälle
1. würde nicht nur senkrecht verlaufen. Die Punktmasse würde sich auch seitlich bewegen oder rotieren.
 2. würde von der (Luft-)Reibung gedämpft werden, die Auf- und Abbewegungen würden immer kleiner werden, bis die Schwingung gänzlich aufhört und die Masse wieder in ihrer Ruhelage verweilt.
 3. würde nicht nur senkrecht verlaufen. Die Punktmasse würde sich auch seitlich bewegen oder rotieren.
- d) Die Schwingung eines idealen Federpendels hängt von der Auslenkung, der angehängten Masse und der Federhärte ab.
- e) Beim realen Federpendel könnte die Feder bei einer sehr großen anfänglichen Auslenkung so stark gedehnt werden, dass sich die Feder permanent verformt, also nicht mehr elastisch ist und dadurch das Federpendel nicht mehr schwingen kann.
- f) Das Modell des idealen Federpendels ist nicht dazu geeignet, die Bewegung des Kindes auf der Schaukel zu beschreiben, da in der Realität das Kind angeschoben wird oder selbst die Schwingung einflusst. Nur in einem Zeitintervall, in dem die Schwingung (annähernd) gleichbleibt, hätte das Modell des idealen Federpendels eine Aussagekraft bzw. könnte prognostisch eingesetzt werden.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.

Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

