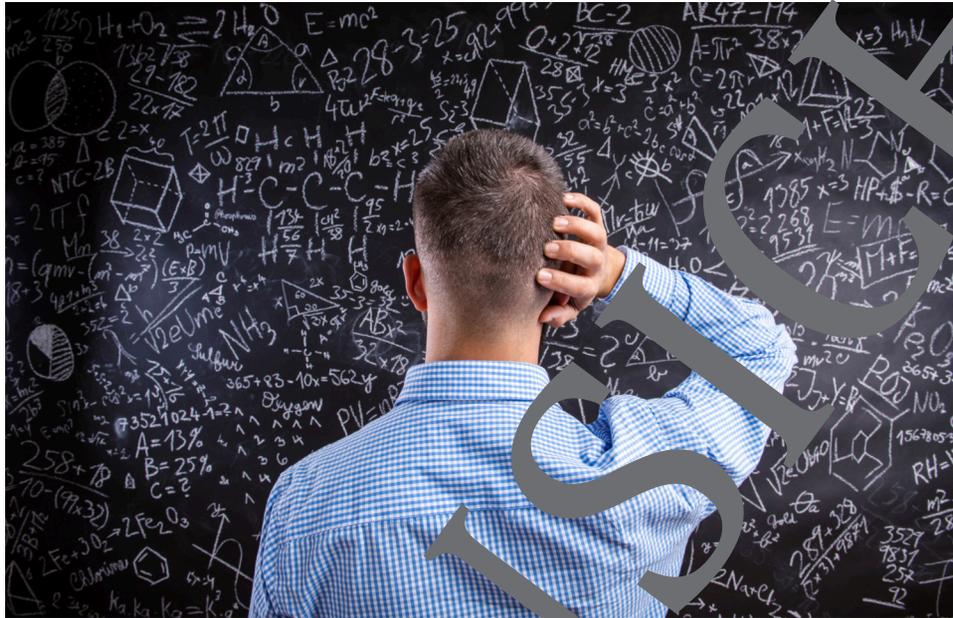


Der Gebrauch von Vektoren: ein Zauberschlüssel

Walter Czech, Krumbach



© Colourbox

Ein Geistesblitz hilft, ein Problem zu lösen, führt aber auch systematisches Arbeiten zum Ziel.

Klasse: 11/12

Dauer: 5 Stunden

Inhalt: Wie packt man erfolgreich ein mathematisches Problem an?
Zum Beispiel mit der Vektorrechnung!

Ihr Plus:

- ✓ Eine in Form einer Schatzsuche verkleidete Problemaufgabe lockert den Unterricht auf. Die Lösungsmittel sind das machtvolle Werkzeug Vektoren sind.
- ✓ Geeignet für Vertiefungsstunden

Oft rechtfertigen wir die Beschäftigung mit Mathematik dadurch, dass man auf ihre **Anwendungen** verweist. Das ist in einzelnen Fällen sicher zutreffend. Warum aber gibt es neben der angewandten Mathematik einen mindestens ebenso großen und wichtigen Bereich: die **reine Mathematik**? Offenbar existiert noch ein anderes Motiv als der Praxisbezug, Mathematik zu treiben. Dieser Drang ist so stark, dass sich ganze Generationen von Mathematikern über Jahrzehnte hinweg mit dem anwendungslosen Denken beschäftigt haben. Sie haben sich an einem Problem festgebissen und kreativ nach einer Lösung gesucht.

Die **mathematische Schatzsuche** ist eine solche, hübsch verkleidete Problemaufgabe, bei deren schrittweiser Lösung die Schüler lernen, wie man ein Problem angeht. Dabei entdecken sie, welches machtvolle Werkzeug **Vektoren** sind.

Reihe 13 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
Einstieg M 1	Wo war bloß der Galgen? – Eine Schatzsuche M 1 wird gelesen; Ihre Schüler befolgen die Anleitung zum Auffinden des Schatzes in Form eines Rollenspiels	
M 2	Galgen mal hier, mal dort! – Spezialfälle durchspielen Untersuchung des Problems anhand von Spezialfällen	2.
M 3	Vektoren – wir lösen das Problem allgemeingültig! Geistesblitz: mit Vektoren die Situation beschreiben	3./4.
M 4	Vektoren drehen – Zwischenüberlegung Koordinatenweise Darstellung zweier gleich langer Vektoren in der Ebene, die so zueinander liegen, dass sie miteinander einen Winkel von 90° einschließen	
M 5	Dort ist der Schatz vergraben! Allgemeingültige Lösung des Problems: Der Ortsvektor des Mittelpunktes der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist unabhängig von den Koordinaten des Galgens!	5.
M 6	Tippkarten	

Lehrplanbezug

In **Bayern**³ sind für die **Koordinatengeometrie im Raum** in Klasse 11 ca. 22 Unterrichtsstunden vorgesehen. In **Sachsen** sind die **Vektorrechnung** im Lernbereich 3 der Jahrgangsstufe 12 mit Richtstundenanzahl 1 im Lehrplan⁴. In **Baden-Württemberg** (und auch in den anderen Bundesländern) sind Aufgaben aus dem Bereich der **Analytischen Geometrie** (wobei namentlich auch der sichere Umgang mit Vektoren gehört) Gegenstand der schriftlichen **Abiturprüfung**. Im Lehrplan **NRW** findet man zum **Problemlösen** den Absatz: „Die mathematische Bearbeitung außer- oder innermathematischer Kontexte führt immer zu Problemstellungen, die (zunächst) nicht schematisch oder in direkter Verbindung an bekannte Muster und Verfahren bearbeitet werden können. Das Problemlösen ist der Prozess der Bearbeitung solcher Problemstellungen durch Entwerfen, Lösen durch Anwendung heuristischer Strategien und Reflektieren von Lösungsergebnissen.“⁶ Vektoren und Vektoroperationen nehmen auch in diesem Lehrplan einen breiten abiturrelevanten Raum ein.

³ <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/content/serv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192>

⁴ Lehrplan für Sachsen, S. 91;

<http://www.lern.sachsen.de/~gymengel/content/schule/faecher/mathe/download/lehrplan.pdf>

⁵ Schwerpunktthemen schriftliche Abiturprüfung Baden-Württemberg;

https://rp.baden-wuerttemberg.de/rps/Abt7/Ref75/Documents/schwerpunktthemen_abitur_2016.pdf

⁶ http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

Reihe 13	Verlauf	Material S 1	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 1 Wo war bloß der Galgen? – Eine Schatzsuche

Edward Thatch, genannt „Schwarzbart“, war der gefürchtetste Pirat der Karibik: er trug stets eine Pistole bei sich und vergrub seine Beute auf einer einsamen Insel vor Kuba. Lange nachdem Schwarzbart im Kampf auf See gefallen war, fand man seine Schatzkarte.

II/B



© iStock / Thinkstock

Thatch, genannt „Schwarzbart“

Dort stand geschrieben:

„Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach rechts, stecke die erste Fahne! Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genauso weit unter rechtem Winkel nach links, stecke die zweite Fahne!“

Der Schatz liegt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.“

Die Schatzkarte von Schwarzbart

Die Palme und die Steine waren noch da; der Galgen war längst abgetragen. Der Suchtrupp war in dem ebenen Gelände trotzdem mit dem ersten Spatenstich auf die Schatzkiste, obwohl man von einer „falschen“ Stelle aus gezählt hatte. War das Zufall?

Reihe 13	Verlauf	Material S 3	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 3 Vektoren –wir lösen das Problem allgemeingültig



Die eigentliche Leistung bei der Lösung einer Aufgabe ist es allerdings, die **Idee eines Planes** auszudenken. Diese Idee mag langsam auftauchen, sie kann aber auch nach anscheinend erfolglosen Versuchen und einer Phase des Zögerns plötzlich in einer Erleuchtung als ein „Geistesblitz“ aufleuchten.

Eine gute Idee ist ein Glücksfall, eine Inspiration, eine Gabe der Götter.⁷

Nun, im vorliegenden Problem werden geradlinig verlaufende Strecken nach einer bestimmten Regel aneinandergeschaltet. Es liegt daher nahe, die Konstruktion mithilfe von **Vektoren** zu beschreiben.

Die Idee, diese Anweisungen zum Auffinden des Schatzes mithilfe von Vektoren zu beschreiben, ist also die *Inspiration*, die uns hier zum Ziel führt.

Die Abbildung unten zeigt die entsprechende zeichnerische Darstellung.

Die Ortsvektoren zu **P (Palme)**, **G (Galgen)** und **F (Felsbrocken)** sind mit \vec{p} , \vec{g} und \vec{f} bezeichnet.

Aufgabe

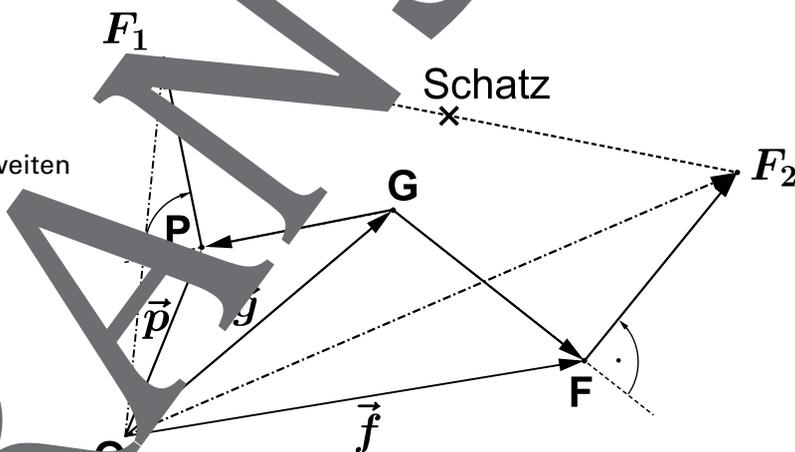
Verfolgen Sie den Text sorgfältig anhand der Zeichnung:

Für den Ortsvektor zur ersten Fahne F_1 gilt:

$$\overrightarrow{OF_1} = \vec{p} + \overrightarrow{PF_1}$$

Für den Ortsvektor zur zweiten Fahne F_2 gilt Ähnliches:

$$\overrightarrow{OF_2} = \vec{f} + \overrightarrow{FF_2}$$



Ergänzen Sie den Text:

Zwischen den Vektoren \overrightarrow{GP} und $\overrightarrow{PF_1}$ gibt es eine Beziehung. $\overrightarrow{PF_1}$ entsteht aus \overrightarrow{GP} , indem man diesen Vektor _____ Uhrzeigersinn dreht.

Zwischen den Vektoren \overrightarrow{GF} und $\overrightarrow{FF_2}$ gibt es eine Beziehung. $\overrightarrow{FF_2}$ entsteht aus \overrightarrow{GF} , indem man diesen Vektor _____ Uhrzeigersinn dreht.

Vergleichen Sie Ihre Antworten mit der Lösungskarte **L 3**.

Achten Sie darauf, ob im oder entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht wird.

⁷ G. Polya: Schule des Denkens. Francke Verlag, Bern 1949. Sammlung Dalp

Reihe 13	Verlauf	Material S 4	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

II/B

M 5 Dort ist der Schatz vergraben!

Jetzt haben Sie alles beieinander, um das Problem allgemeingültig lösen zu können.



Edward Thatch

Aufgabe

Wir beziehen uns auf die Zeichnung in **M 3** (siehe nochmals unten) und stellen fest:

Für den Ortsvektor zur ersten Fahne F_1 gilt:

$$\vec{OF}_1 = \vec{p} + \vec{PF}_1$$

Wir wissen, dass man \vec{PF}_1 erhält, indem man \vec{GP} um 90° im Uhrzeigersinn dreht.

a) Ergänzen Sie:

Für \vec{GP} gilt die Darstellung $\vec{GP} = \begin{pmatrix} p_1 - g_1 \\ p_2 - g_2 \end{pmatrix}$, womit für den gleichlangen Vektor

$$\vec{PF}_1 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

Für den Ortsvektor zur zweiten Fahne F_2 gilt:

$$\vec{OF}_2 = \vec{f} + \vec{FF}_2$$

Wir wissen, dass man \vec{FF}_2 erhält, indem man \vec{GF} um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn dreht.

b) Ergänzen Sie:

Für \vec{GF} gilt die Darstellung $\vec{GF} = \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ f_2 - g_2 \end{pmatrix}$, womit für $\vec{FF}_2 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ gilt.

Wir setzen dies ein in

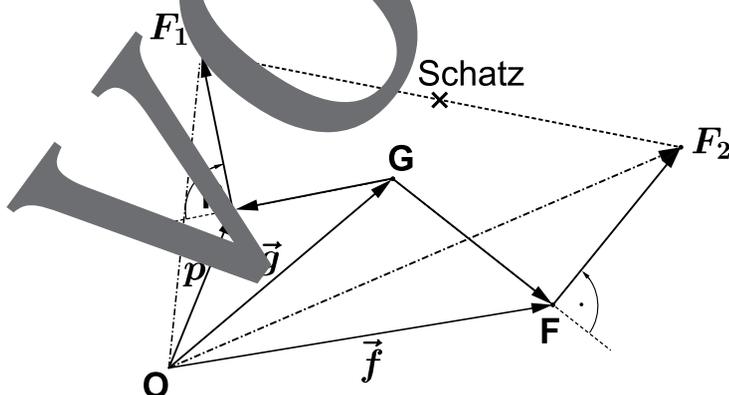
$$\vec{OF}_1 = \vec{p} + \vec{PF}_1 = \quad$$

und

$$\vec{OF}_2 = \vec{f} + \vec{FF}_2 = \quad$$

Der Schatz ist am Mittelpunkt der Strecke \vec{F}_1F_2 vergraben.

Jetzt sollten Sie die Rechnung zu Ende führen können.



Zeichnung in M 3



Schatz

© iStock / Thinkstock

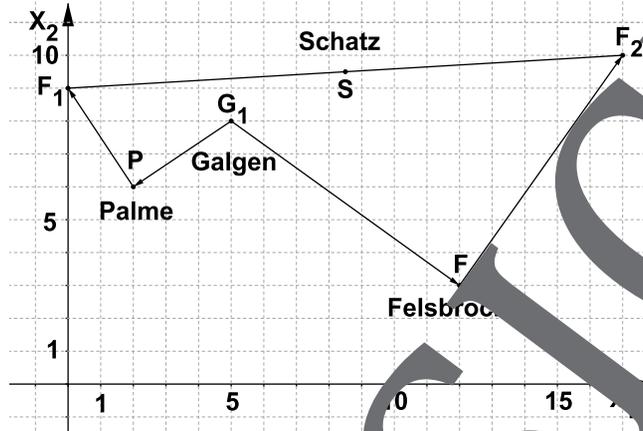
Reihe 13	Verlauf	Material S 5	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 6

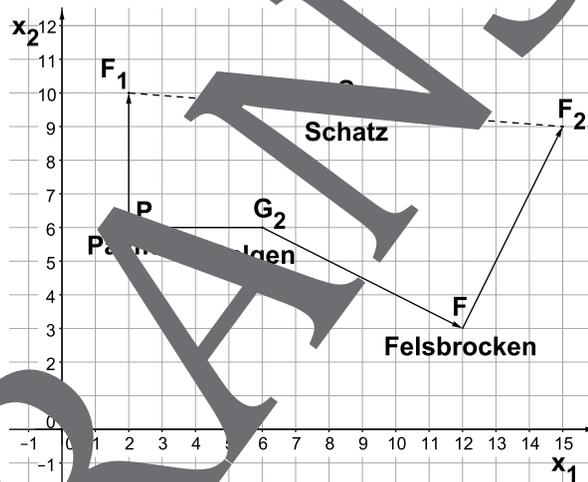
Tippkarten zu M 2



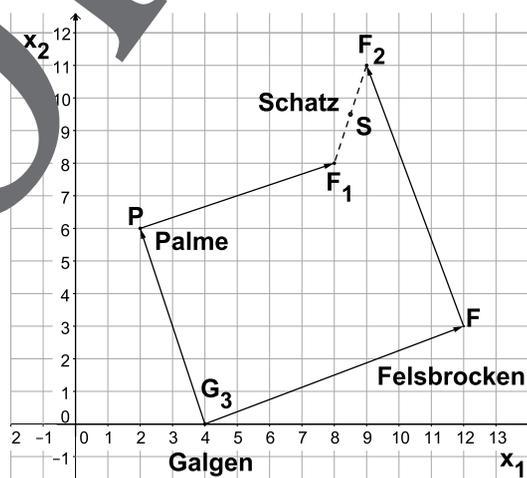
Tipp zu M 2a – Galgen am Ort (5|8)



Tipp zu M 2b – Galgen am Ort (6|6)



Tipp zu M 2c – Galgen am Ort (4|0)

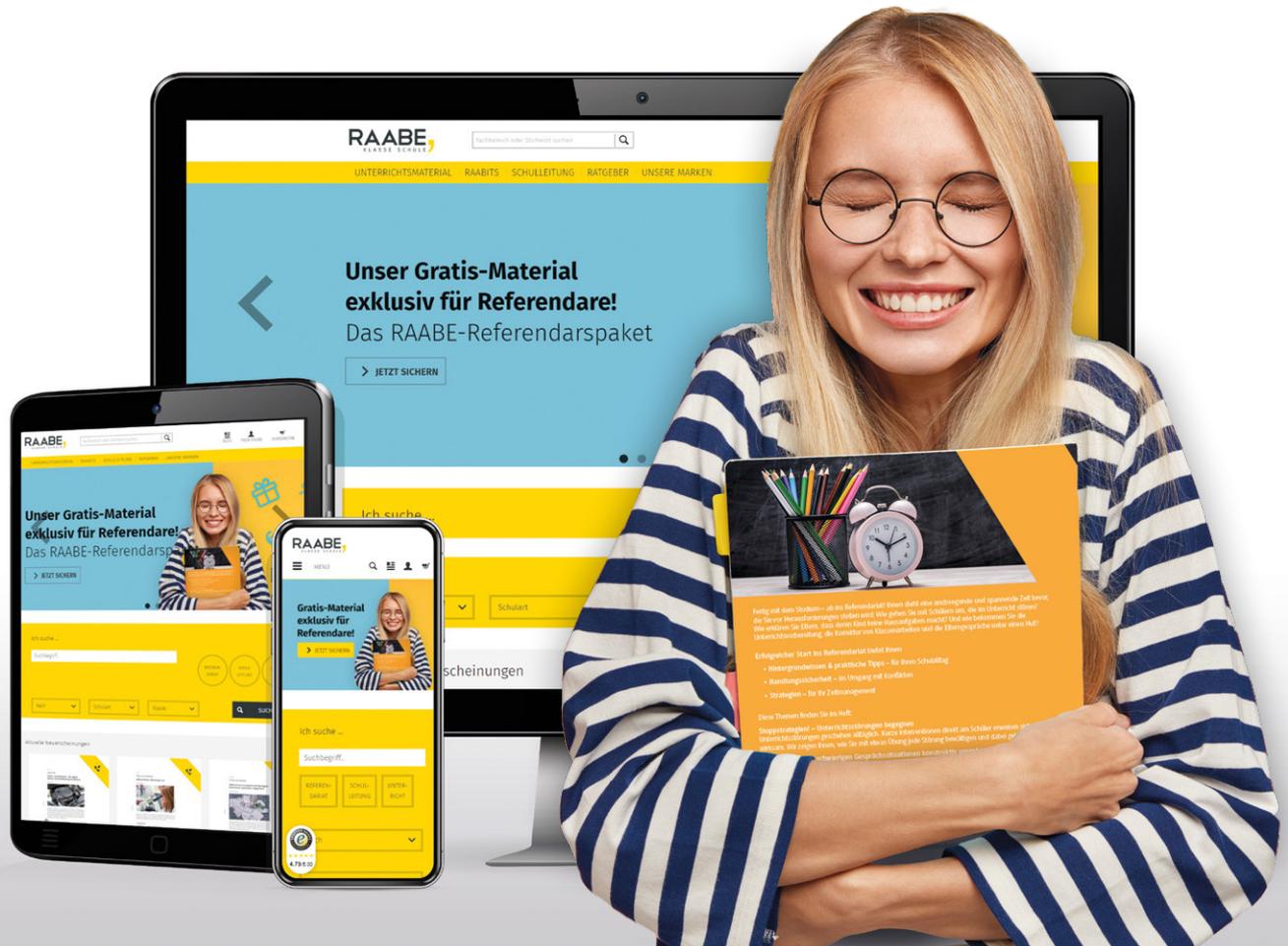


II/B

VORANSICHT

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 4.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Sichere Zahlung per Rechnung,
PayPal & Kreditkarte



Exklusive Vorteile für Abonnent*innen

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



Käuferschutz mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de