

Baumdiagramme – die Pfadregeln spielend entdecken

Antonius Warmeling, Hagen

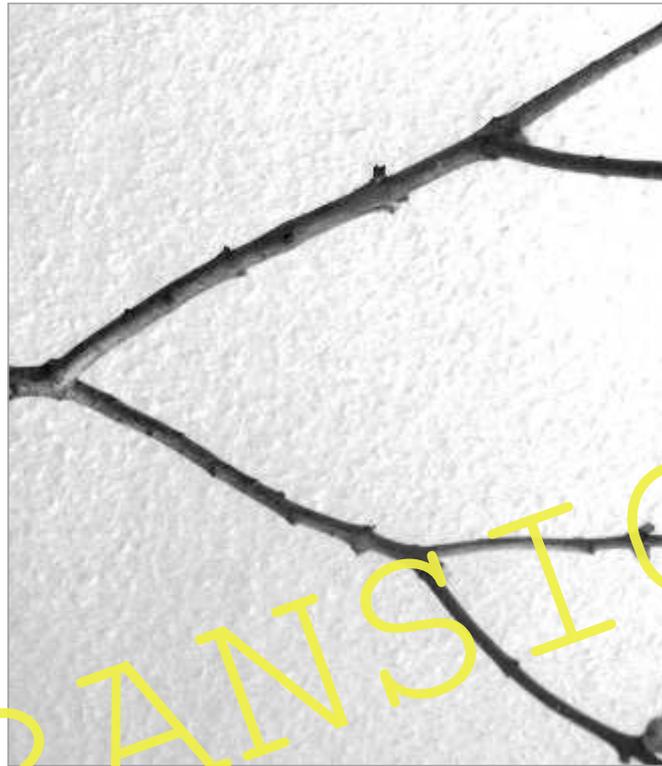


Foto: A. Warmeling

Ein Baumdiagramm ähnelt einem sich gabelnden Ast.

Klasse: 8, 9

Dauer: 6 Stunden

Inhalt: einfaches Fingerspiel zum Einstieg und zur Erarbeitung der beiden Pfadregeln; mehrstufige Zufallsexperimente; Satz über die Gegenwahrscheinlichkeit; Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Ihr Plus:

- ✓ Tippkarte zur Erstellung von Baumdiagrammen
- ✓ gezielte Übungen
- ✓ Lernerfolgskontrolle (M 7)

Steigen Sie mit dem einfachen Fingerspiel **EVEN or ODD** in das Thema „mehrstufige Zufallsversuche“ ein. Entwickeln Sie in der Auswertungsphase die beiden Pfadregeln und den Satz über die Gegenwahrscheinlichkeit. In den Übungen werden dann verschiedene Feinheiten thematisiert:

- Muss ich das Baumdiagramm komplett zeichnen?
- Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Voraussetzung für die Unterrichtseinheit ist lediglich ein fundierter **Wahrscheinlichkeitsbegriff** und Kenntnisse über **Laplace-Versuche**. Eine Lernerfolgsüberprüfung, die Sie als Klassenarbeit bzw. Test einsetzen können, schließt die Unterrichtseinheit ab.

Didaktisch-methodische Hinweise

Lehrplanbezug

Im Lehrplan von Bayern findet man:

Die Schüler ermitteln Laplace-Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen (8. Klasse).¹ Sie können mehrstufige Zufallsprozesse beschreiben und Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln berechnen (9. Klasse).²

Voraussetzungen

Wichtige Grundlage für die Behandlung **zwei- und mehrstufiger Zufallsversuche** ist ein fundierter **Wahrscheinlichkeitsbegriff**. Die Lernenden sollten wissen, dass Wahrscheinlichkeiten klassisch (über Symmetrien und geometrische Formen) oder statistisch (über lange Versuchsserien) ermittelt werden können. Auch der Begriff des **Ereignisses** als Menge aller Ergebnisse, die einer bestimmten Beschreibung genügen, sollte bekannt sein. Dabei können Sie die **Mengenschreibweise** verwenden, müssen es aber nicht. Wir beschreiben Ereignisse lieber mit kurzen Begriffen wie „ist Primzahl“ oder „3absi gewinnt“ etc.

Baumdiagramme

Baumdiagramme sind ein bewährtes Mittel, um – bis zum Abitur – stochastische Situationen übersichtlich darzustellen. Nehmen Sie sich daher Zeit, dieses Instrument einzuführen und kommen Sie bei jeder sich bietenden Situation im Sinne eines Spiralcurriculums darauf zurück.

Wir zeichnen Baumdiagramme immer von links nach rechts, von oben nach unten ist aber ebenso möglich. Neben einer guten Begriffsbildung (Knoten, Ast, Pfad) und einem strukturellen Überblick (Summe aller Wahrscheinlichkeiten von Ästen, die von einem Knoten ausgehen, ist gleich 1) sind die beiden **Pfadregeln** und die **Komplementärregel** wichtig. Letztere sollte schon von den einstufigen Zufallsversuchen bekannt sein.

Die Pfadregeln

1. Die Pfad-Multiplikationsregel besagt, dass zur Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeit die Astwahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert werden.
2. Die Pfad-Additionsregel besagt, dass zur Berechnung einer Ereigniswahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade addiert werden, die zu diesem Ereignis gehören.
3. Nach der Komplementärregel ergänzen sich die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und seines Gegenereignisses zu 1. Kurzfassung: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$



Zur Durchführung der Unterrichtsreihe

Mit dem Spiel EVEN oder ODD steigen Sie ohne weitere Erläuterungen in diese Unterrichtseinheit ein, da viele Schüler das Spiel „Schere, Stein, Papier“ kennen. Die Auswertung ist die zentrale Stelle dieser Unterrichtseinheit, bei der die wichtigsten Regeln erarbeitet werden. Hier sollten Sie sich unbedingt genügend Zeit nehmen.

¹ <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26279>

² <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26254>

Reihe 24 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Die Bearbeitung (**M 1a**) geschieht zunächst zu zweit. Bei der Vorabschätzung sind viele noch un schlüssig, welcher Spieler die besseren Chancen haben könnte. Einige wenige haben aber schon eine begründete Ahnung. Fordern Sie diese dazu auf, ihre Theorie dem Partner zu erläutern. Die 30 Versuche dauern einschließlich Gruppenauswertung etwa 20 Minuten. Sie haben also in der ersten Stunde auf jeden Fall noch Zeit, die Ergebnisse der Vierer-Spielpaare an der Tafel zu sammeln und damit ein Klassenergebnis zu berechnen.

Sammeln Sie außerdem an dieser Stelle, bei wie vielen Paaren EVEN bzw. ODD mehr Gewinne gemacht haben. Wie nicht anders zu erwarten, gibt es bei den Ergebnissen der Partnergruppen unterschiedliche Ergebnisse. Bei unseren Versuchen hatte EVEN immer etwas häufiger die 30er-Runden gewonnen. Dies kann durchaus anders sein und kann dann später noch einmal aufgegriffen werden. Im Klassenergebnis – bei insgesamt mehr als 400 Versuchen – dürfte aber in den meisten Fällen EVEN die Nase vorn haben. Der Erwartungswert bei 420 Versuchen liegt für EVEN etwa bei 219 Siegen, für ODD nur bei 201 Siegen.

Die zweite Stunde können Sie mit der Frage einläuten, ob denn nun sicher entschieden ist, wer die besseren Gewinnchancen hat. In der Regel verneinen dies die Schüler z. B. mit der Begründung, dass ja das Glück immer eine Rolle spiele. Manche schlagen in Erinnerung an die Behandlung einstufiger Zufallsversuche vor, doch noch mehr Versuche zu machen. Loben Sie dies sehr, weil diese Schüler ein bewährtes Verfahren auf die neue Situation übertragen wollen. Allerdings kostet das Zeit – so Ihre Argumentation. Ob es nicht auch noch andere Möglichkeiten gäbe? Falls an dieser Stelle nicht ein Vorschlag kommt, doch einmal alle möglichen Ergebnisse aufzuschreiben, können Sie immer noch die Idee einer systematischen Untersuchung einbringen. Das hilft eigentlich immer.

Die Schüler haben dann etwa drei Minuten Zeit, in Stillarbeit mögliche Ergebnisse aufzuschreiben. Beim Sammeln an der (Schmier-)Tafel wirken Sie darauf hin, dass die Ergebnisse als Paare mit Beachtung der Reihenfolge aufgeschrieben werden und sie direkt EVEN oder ODD als Gewinnmöglichkeit zugewiesen werden. An dieser Stelle können sie auch verschiedene Strategien zur Sammlung diskutieren. Bei uns stand zum Schluss etwa die nebenstehende Übersicht an der Tafel.

EVEN gewinnt			ODD gewinnt		
(1/1)	(1/3)	(1/5)	(1/2)	(1/4)	
(2/2)	(2/4)		(2/1)	(2/3)	(2/5)
(3/1)	(3/3)	(3/5)	(3/2)	(3/4)	
(4/2)	(4/4)		(4/1)	(4/3)	(4/5)
(5/1)	(5/3)	(5/5)	(5/2)	(5/4)	
13 Möglichkeiten			12 Möglichkeiten		

Damit ist es entschieden, dass EVEN die größeren Chancen hat, weil es bei EVEN eine Gewinnmöglichkeit mehr gibt. Damit ist das Problem gelöst. Um die Schüler dennoch für eine weitere Systematisierung zu gewinnen, verweisen Sie darauf, dass das systematische Aufschreiben immer schwieriger wird, wenn man z. B. noch einen dritten Spieler mit dazunimmt. Um das erste Baumdiagramm nicht langwierig an die Tafel zeichnen zu müssen, verteilen Sie eine Vorlage (**M 1b**), die es Ihnen erlaubt, auch schon wichtige Fachbegriffe einzutragen. Ihre Schüler erkennen leicht, dass es $5 \cdot 5 = 25$ verschiedene Möglichkeiten gibt, die alle gleich wahrscheinlich sind. Jede Möglichkeit entspricht einem Pfad im Baumdiagramm.

Die Reaktion der Schüler ist absehbar: „Das ist aber auch nicht übersichtlicher.“ Das ist eine schöne Vorlage: „Da stehen ja auch viel zu viele unnötige Informationen drin.“ Kehren Sie mit Ihren Schülern noch einmal zur systematischen Übersicht der Ergebnisse zurück und fragen Sie, welche Gemeinsamkeiten die Gewinnchancen von EVEN bzw. ODD haben. Damit wird schnell klar, dass die angezeigte Fingeranzahl gar nicht nötig ist, sondern lediglich eine Unterscheidung zwischen gerade und ungerade nötig ist. Damit kann man ein sehr viel übersichtlicheres Baumdiagramm mit nur vier Pfaden zeichnen.



Reihe 24 S 5	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1a	EVEN oder ODD Einstiegsspiel: Man zeigt mindestens einen und höchstens fünf Finger.	1./2.
M 1b	Tabelle für die Spielstatistik Vorlage für das erste Baumdiagramm Beides ist Zusatzmaterial für Material M 1a	
M 1c	EVEN oder ODD mit neuer Regel – eine Spielvariante Man kann auch <u>keinen</u> Finger zeigen.	HA
M 2	Mensch ärgere dich nicht ein geeignetes Baumdiagramm zeichnen und verschiedene Wahrscheinlichkeiten für das Mensch-ärgere-dich-nicht-Würfeln berechnen	3.
M 3	So zeichnet man ein Baumdiagramm – Tipplarte Zeichenhilfe	
M 4	Zwei- und mehrstufige Zufallsversuche Übungen zur Vertiefung des Umgangs mit dem Baumdiagramm	4.
M 5	Ziehen mit und ohne Zurücklegen Übungen zu Urnenexperimenten Ziehen mit und ohne Zurücklegen	5.
M 6	Vorbereitung auf den Test (Hausaufgabe) sich nochmals die Lösungsstrategien klarmachen den Umgang mit dem Baumdiagramm festigen	HA
M 7 (LEK)	Bist du fit? – Teste dein Wissen! Aufgaben zur Leistungsüberprüfung	6.

Minimalplan

Wenn Sie wenig Zeit haben, können Sie sich – zumindest in NRW – auf zweistufige Zufallsversuche beschränken. Da das Thema aber sehr wichtig ist, sollten Sie sich die Zeit nehmen. Die Aufgaben sollen zum Abschluss eher noch durch vermischte Übungen ergänzt werden. Dazu finden Sie viele Beispiele in den Schulbüchern.

M 1a EVEN oder ODD⁴ – ein Spiel zum Einstieg in das Thema

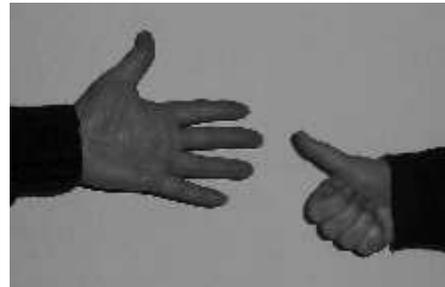
Dieses Spiel spielt ihr zu zweit. Ein Spieler nennt sich **EVEN**, der/die andere **ODD**.

Tipp zur Erklärung:

„Even“ meint im Englischen eine gerade, „odd“ eine ungerade Zahl.

Beide Spieler verstecken eine Hand hinter dem Rücken und zeigen nach einem Kommando (z. B. „Schnick, Schnack, Schnuck“) eine Anzahl von Fingern (mindestens einen, höchsten fünf).

Wenn die Summe der gezeigten Finger eine gerade Zahl ist, gewinnt EVEN, sonst ODD.



5 + 1 = 6, EVEN gewinnt.

Foto: A. Warmeling

Arbeitsauftrag

- a) Beide Spieler notieren, ob sie – wenn sie wählen dürfen – lieber EVEN oder ODD sein wollen.

	EVEN	ODD	Es ist mir egal.
Spieler 1			
Spieler 2			

- b) Für die erste Runde sei derjenige Spieler EVEN, der in der alphabetischen Reihenfolge der Klassenliste zuerst erscheint. Spielt das Spiel 30-mal und notiert in der Tabelle auf der Rückseite jeweils, welche Fingeranzahl die einzelnen Spieler gezeigt haben und wer gewonnen hat.

Wertet eure Spielerreihe aus und überlegt, ob ihr eure Einschätzung aus Aufgabe a) ändert:

	Ich möchte EVEN sein.	Ich möchte ODD sein.	Es ist mir egal.
Spieler 1			
Spieler 2			

- c) Vier Spielpaare tauschen ihre Ergebnisse aus und werten alle 120 Spiele aus:

Spielpaar	Anzahl Spiele	EVEN gewinnt. (Anzahl)	ODD gewinnt. (Anzahl)
1			
2			
3			
4			
gesamt			

Gibt es eine neue Einschätzung?

⁴ Spielidee: <http://www.blick.it/blick/angebote/spielmathe/fortuna/sp10600.htm>

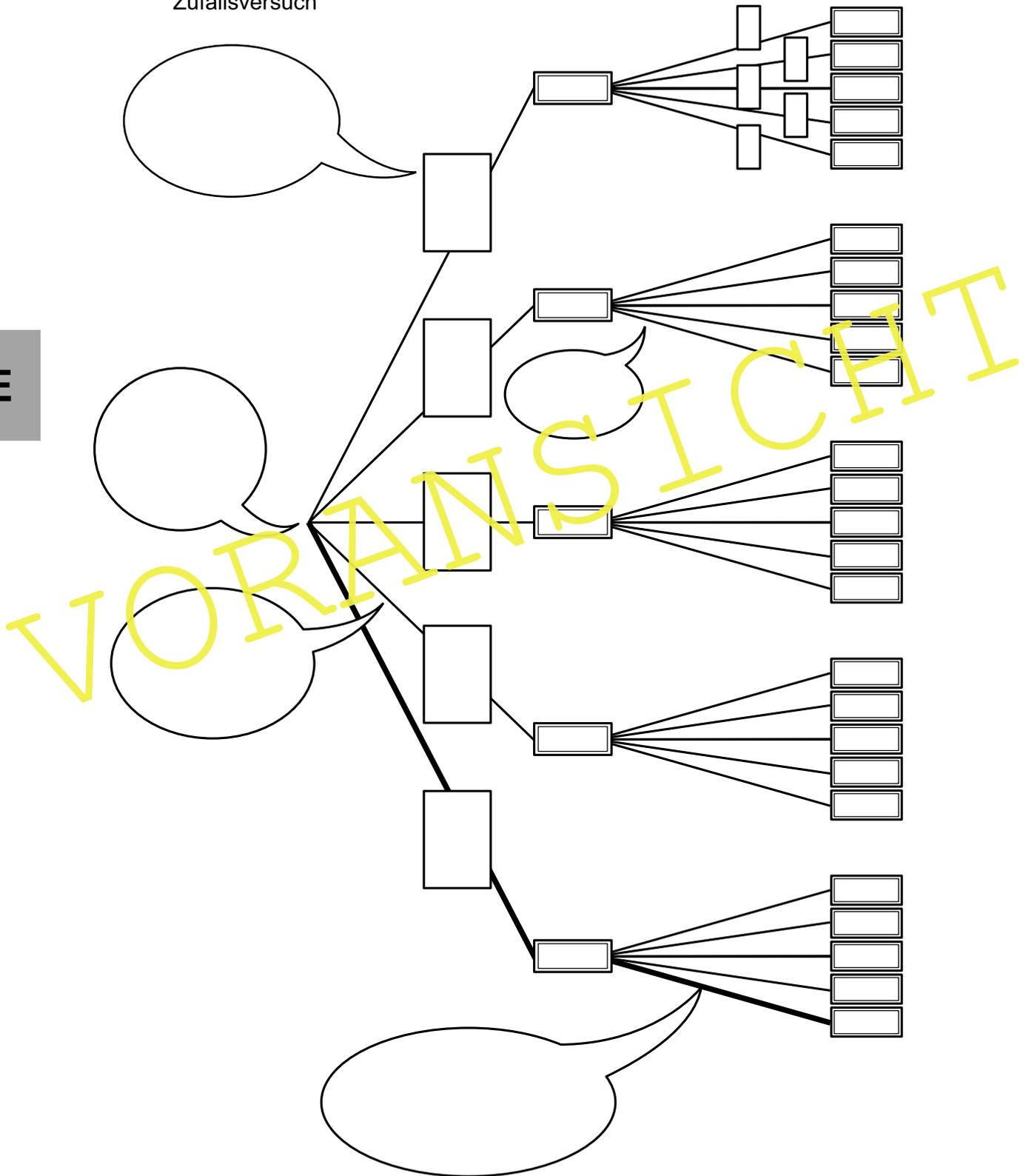
M 1b Vorlage für das erste Baumdiagramm

EVEN oder ODD
ein zweistufiger
Zufallsversuch

1. Stufe
linke Hand

2. Stufe
rechte Hand

Ergebnisse



I/E

M 1c EVEN oder ODD mit neuer Regel – eine Spielvariante

Dieses Spiel spielt ihr zu zweit. Ein Spieler nennt sich **EVEN**, der/die andere **ODD**.

Tipp zur Erklärung:

„Even“ meint im Englischen eine gerade, „odd“ eine ungerade Zahl.



$0 + 3 = 3 \Rightarrow$ ODD gewinnt.

Fotos: A. Warmeling

Beide Spieler verstecken eine Hand hinter dem Rücken und zeigen nach einem Kommando (z. B. „Schnick, Schnack, Schnuck“) eine Anzahl von Fingern (bei dieser Variante kann man auch **keinen Finger** zeigen).

Wenn die Summe der gezeigten Finger eine gerade Zahl ist, gewinnt EVEN, sonst ODD.

Arbeitsauftrag:

- Welcher Spieler hat nun die größten Gewinnchancen? Diskutiert diese Frage in der Gruppe und stellt eine begründete Vermutung auf.
- Zeichnet ein Baumdiagramm zu dieser neuen Spielvariante und überprüft damit eure Vermutungen aus der vorangegangenen Diskussion.



M 2 Mensch ärgere dich nicht

Das bekannte Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ verlangt von jedem Spieler, eine Sechsz zu würfeln, bevor er das Haus verlassen darf. Dazu hat er/sie maximal drei Versuche.

Arbeitsauftrag

Zeichne ein geeignetes Baumdiagramm zu diesem dreistufigen Zufallsversuch und bearbeite dann die folgenden Fragestellungen:

- Berechne die Chance,
 - ... dass er/sie schon beim ersten Versuch mit einer Spielfigur das Haus verlassen darf.
 - ... dass die Spielfigur erst beim dritten Versuch auf das Spielfeld kann.
 - ... dass die Spielfiguren eine weitere Runde im Haus hocken bleiben müssen.



Das Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel

© iStock / Thinkstock

- Begründe oder widerlege: Das Mensch-ärgere-dich-nicht-Würfeln ist ein Laplace-Versuch.

Tipp Dein Lehrer bzw. deine Lehrerin gibt dir zum Aufzeichnen des ersten (vereinfachten) Baumdiagramms eine Schablone.

M 6 Vorbereitung auf den Test (Hausaufgabe)

Aufgabe

Zur Europameisterschaft 2016 gab es wieder Panini-Stickeralben mit 680 Bildern, mit denen man fußballbegeisterten Jugendlichen schnell viel Geld aus der Tasche ziehen konnte.

Die Herstellerfirma hat das Problem, dass sie schon mit der Produktion der Sticker anfangen müssen, wenn die 23-köpfigen Kader noch nicht benannt sind. Sie behauptet aber von sich selbst, dass sie die Nominierung eines Spielers – nach ihren jahrelangen Erfahrungen – mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % richtig vorhersagt.

a) Der deutsche Kader ist auf manchen Positionen (z. B. Manuel Neuer im Tor) schon sehr sicher besetzt. Nehmen wir einmal an, dass 10 Positionen klar sind. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die restlichen 13 Plätze richtig vorausgesagt werden.

b) Begründe oder widerlege:

Das Vorhersagen der restlichen 13 Kaderplätze ist ein Laplace-Versuch.



Torwart

© iurestock/Thinkstock



M 7 Bist du fit? - Teste dein Wissen!

Aufgabe 1

Das Spiel „Stein, Schere, Papier“ wird zu zweit gespielt. Jeder Spieler macht verdeckt mit der Hand ein Zeichen: Stein = Faust, Papier = flache Hand, Schere = gestreckter Zeige- und Mittelfinger. Es gelten die Gewinnregeln:

Stein gewinnt gegen Schere, aber verliert gegen Papier, denn Stein macht die Schere stumpf, aber Papier wickelt den Stein ein. Schere gewinnt gegen Papier, denn sie schneidet Papier.

a) Zeichne ein komplettes Baumdiagramm zu diesem Spiel.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide dasselbe Zeichen machen.

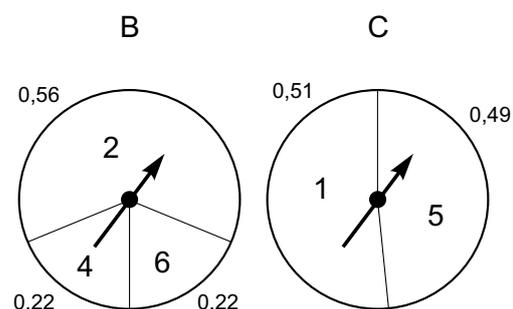
c) Zeige durch Nachrechnen, dass beide Spieler dieselbe Chance auf einen Gewinn haben.

Aufgabe 2

Babsi (B) und Charlie (C) drehen jeweils ihr Glücksrad. Wer die höhere Zahl „dreht“, gewinnt.

a) Zeichne ein Baumdiagramm zu diesem Spiel.

b) Untersuche durch Rechnung, wer von beiden die größeren Gewinnchancen hat.



Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

M 1 Even oder ODD – ein Spiel zum Einstieg in das Thema

■ Der Einsatz dieses Arbeitsblattes ist in den didaktisch-methodischen Hinweisen, Abschnitt „Durchführung der Unterrichtsreihe“, ausführlich beschrieben.

M 2 Mensch ärgere dich nicht

■ Rufen Sie Ihren Schülern den Begriff des Laplace-Experiments in Erinnerung zurück:

Als **Laplace-Experiment** bezeichnet man einen Zufallsversuch, bei dem alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

■ Bei dieser Übung lernen Ihre Schüler nun das erste Mal einen dreistufigen Zufallsversuch kennen. Dies ebenfalls in einem Baumdiagramm darzustellen fällt den Schülern nicht schwer. Es wird aber viel zu groß und damit unübersichtlich, wenn man alle möglichen Ergebnisse berücksichtigt. Betrachtet man aber nur die Ereignisse „6“ und „keine 6“, so hat man nur 8 Pfade. Letztendlich braucht man sogar nur einen Pfad (zu zeichnen), um

$$P(\text{mind. eine 6}) = 1 - P(\text{keine 6/keine 6/ keine 6}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

zu berechnen.

Im Anschluss an diese Übungen können Sie Ihren Schülern die Übersicht **M 3** verteilen, die alle wichtigen Informationen zur Erstellung von Baumdiagrammen enthält und damit eine wichtige Hilfe für die weiteren Übungen darstellt.

Lösungen zur Arbeitsauftrag

a) i)

$$\frac{1}{6}$$

ii)

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

iii)

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Zu iii) Lediglich dann, wenn man 3 Mal keine 6 würfelt, muss man zu Hause bleiben und der nächste Spieler ist an der Reihe.

b) Ist der Würfel fair, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes der Ergebnisse 1, 2, ... 6 jeweils $\frac{1}{6}$ (Laplace-Versuch). Da man bei der Frage, ob man zu Beginn des Spiels das Haus verlassen darf oder nicht, aber in jeder Teilstufe des dreistufigen Zufallsversuchs die Ereignisse (eine 6, Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$) bzw. (keine 6, Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$) betrachtet, ist das Mensch-ärgere-dich-nicht-Würfeln zu Beginn des Spiels kein Laplace-Experiment.

Zusammenfassend hat das „Hockenbleiben“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$, das Gegenereignis „Rauskommen“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{91}{216}$.

M 4 Zwei- und mehrstufige Zufallsversuche

■ Dieses Arbeitsblatt können die Schüler sowohl allein, in Partnerarbeit und auch in Kleingruppen bearbeiten. Es lässt sich auch gut als **Mini-Gruppenpuzzle** einsetzen. Dazu werden Vierer-Gruppen gebildet, jede Gruppe erhält ein Arbeitsblatt und spricht ab, wer welche Aufgabe bearbeitet. Danach bearbeitet jeder seine Aufgabe in Stillarbeit. Nach spätestens 15 Minuten treffen sich alle Bearbeiter von Aufgabe 1 in einer Experten-gruppe, zu den anderen Aufgaben ebenfalls.