Die Mathematik im Klavier – Exponentialfunktion und Logarithmus

Nico Lorenz, Waltrop

Sophie spielt Béla Bartók.

Klasse: 10/11

Dauer: 1–2 Stunden

Inhalt: Anwendung von Exponentialfunktion und Logarithmus, um die Frequenzen der Töne eines Klaviers zu untersuchen

Ihr Plus: geeignet für fachübergreifendes Unterrichten: Es gibt Querverbindungen zur Musik und zur Physik.

Wie hängen eine Klaviertaste und die Frequenz des Tones, den diese Taste erzeugt, mathematisch zusammen? Dieser Zusammenhang wird hier untersucht!

Abseits der so wenig variierenden Schulbuchaufgaben beschreibt der Beitrag eine alltagsnahe Anwendung von Exponentialfunktion und Logarithmus, die zusätzlich durch weitreichende Querverbindungen zur Musik und zur Physik interessant erscheint.

Didaktisch-methodische Hinweise

Inhalt

Thema des Beitrags sind Exponentialfunktionen zu beliebiger Basis. Aufbauend auf vielseitigen, vorbereitenden Aufgaben wird eine Exponentialfunktion zur Basis $\sqrt[12]{2}$ aufgestellt, mit der sich die Frequenzen der Töne eines Klaviers berechnen lassen. Von dieser Funktion ausgehend werden Klaviere und die darauf spielbaren Töne mathematisch untersucht.

Fachliche Voraussetzungen

Ihre Schüler sollten wissen, was eine **Exponentialfunktion** ist, und solche Funktionen (auch zu **beliebiger Basis**) aufstellen können. Weiterhin sollten sie in der Lage sein, **Exponentialgleichungen** mithilfe von **Logarithmen** zu lösen. Außerdem ist ein sicherer Umgang mit (höheren) **Wurzelausdrücken** und den **Potenzgesetzen** unumgänglich. Dabei sollten Ihren Schülern insbesondere die folgenden Identitäten bekannt sein:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{sowie} \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{und} \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

Vorbereitung der Unterrichtseinheit

Laminieren Sie die **Tippkarten** (**M 3**), legen Sie diese auf dem Lehrerpult aus und stellen Sie einen Overheadprojektor bereit.

Ablauf der (Doppel-)Stunde

Teilen Sie die Aufgaben (**M 2**) aus. Projizieren Sie die **Folie (M 1)** mithilfe eines Overheadprojektors an die Wand und beginnen Sie mit einem kurzen **Vortrag** über die Einteilung der Töne.

- Aufeinanderfolgende Töne machen einen Halbtonschritt aus.
- 12 Halbtonschritte ergeben eine Oktave.
- Die internationalen Bezeichnungen der Töne bestehen aus einem **Buchstaben** und einer **Zahl**, wobei die Zahl die Höhe der Oktave kennzeichnet und sich die Buchstaben periodisch wiederholen.

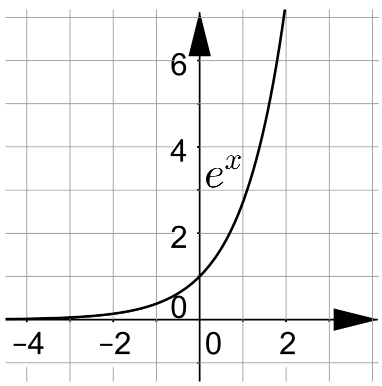
  Beispiel: Der Kammerton von 440 Hz trägt die Bezeichnung „A4“.

Erklären Sie dies mit entsprechenden Verweisen auf das Bild der Klaviertastatur, die Sie an die Wand projizieren.

Gehen Sie weiterhin zur Wiederholung noch einmal auf die Bedeutung von

exponentiellem Wachstum

ein. Wiederholen Sie dabei insbesondere, dass sich mit jedem Schritt die Größe um einen **konstanten Faktor** vergrößert, und ziehen Sie Vergleiche zu vorherigen Aufgaben heran, in denen Verdopplungs- oder Halbwertszeiten berechnet wurden.



Zur Erinnerung: Die natürliche Exponentialfunktion e^x

Auf einen Blick

Einstieg, Aufgaben und Tipps

Material	Thema
M 1 (Sw-Fo)	**Die Mathematik im Klavier** Schwarz-Weiß-Folienvorlage für eine kurze Einführung in die **Notenlehre** Veranschaulichung des mathematischen Zusammenhangs zwischen Klaviertasten und den Frequenzen der Töne, die sie erzeugen
M 2	**Die Mathematik im Klavier – Aufgaben** Aufgabenblatt, in dem – durch kleinschrittige Aufgabenteile angeleitet – die Frequenzen von Tönen untersucht werden, die auf einem Klavier spielbar sind
M 3	**Tippkarten** Tippkarten zu einzelnen Aufgabenteilen

Minimalplan

Falls die Zeit nicht für die Bearbeitung des gesamten Materials genügt, empfiehlt es sich, die Aufgabenteile h) und i) von Material **M 2** wegzulassen. Durch diese Stoffauswahl wird die Thematik bereits in ausreichender Breite abgefragt.

Lehrplanbezug

Der Lehrplan **Bayern**[1] weist diese Stichworte auf:

- Beispiele für exponentiellen Anstieg und exponentielle Abnahme
- allgemeine Exponentialfunktion
- Begriff des Logarithmus, Rechenregeln für Logarithmen
- einfache Exponentialgleichungen

Der Kernlehrplan **Nordrhein-Westfalen**[2] weist diese Stichworte auf:

- Die Schüler beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer und Exponentialfunktionen.
- Die Schüler untersuchen Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe funktionaler Ansätze.

Der Bildungsplan **Baden-Württemberg**[3] weist diese Stichworte auf:

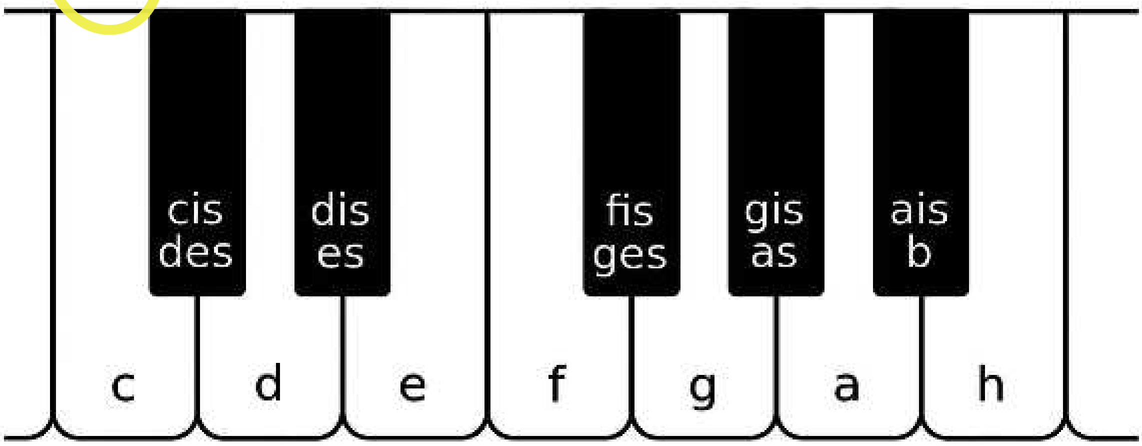
- Exponentialgleichungen unter anderem im Zusammenhang mit Wachstumsprozessen lösen
- den Logarithmus einer Zahl als Lösung einer Exponentialgleichung verwenden

1 http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26221
2 http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
3 http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/9-10/01/00

M 1 Die Mathematik im Klavier

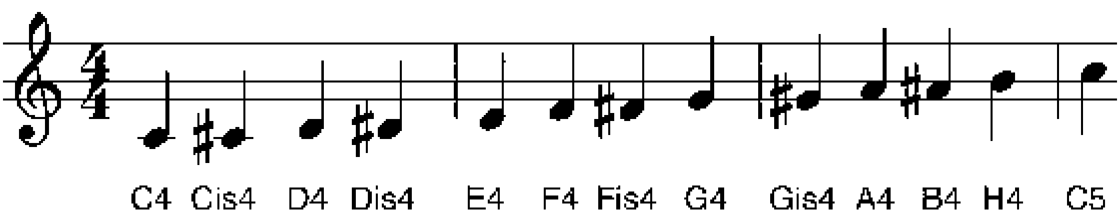
© Dieter Schütz/pixelio.de

Ein schöner Flügel hat gewöhnlich die gleiche Anzahl Tasten wie ein Klavier.



Zeichnung: Christian Panse

Die Tasten einer Oktave (Ausschnitt einer Klaviertastatur)

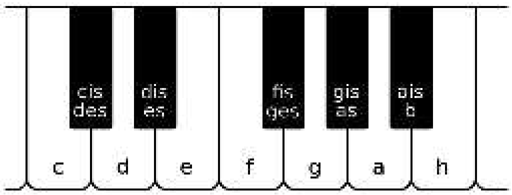


Die Noten einer Oktave

M 2 Die Mathematik im Klavier – Aufgaben

Die Frequenz eines Tons, also einer Schallwelle, bestimmt, in welcher Höhe wir diesen Ton hören. Sie gibt an, mit welcher Regelmäßigkeit die Schallwelle schwingt. Der sog. ***Kammerton*** in der Musik beispielsweise hat eine Frequenz von 440 Hz (Hertz), d. h. die Schallwelle schwingt in einer Sekunde 440 Mal. Dieser Ton wird international in der Regel mit „A4" bezeichnet und als Grundton benutzt, um Instrumente zu stimmen.

Entlang der Notenskala wächst die Frequenz der Töne ***exponentiell***: geht man von einem Ton eine Oktave, d. h. 12 Halbtonschritte, weiter, so verdoppelt sich die Frequenz. Die jeweilige Oktave, in der sich der Ton befindet, wird durch eine Zahl nach der Tonbezeichnung gekennzeichnet:



Die Noten einer Oktave

Zeichnung: Christian Panse

Eine Oktave über dem Kammerton liegt der Ton A5, eine Oktave unter dem Kammerton liegt der Ton A3. Die Buchstaben zur Bezeichnung des Tons wiederholen sich dem obigen Bild entsprechend, das einen Ausschnitt einer Klaviertastatur zeigt; nach dem Ton H4 folgt beispielsweise C5, dann Cis5, usw. Dabei erklingt ein Ton umso höher, je weiter die entsprechende Taste rechts auf dem Klavier liegt.

Aufgabe

a) Berechnen Sie die Frequenzen der Töne A3 und A5.

b) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Frequenzen zweier aufeinanderfolgender Töne?

Tipp Betrachte einen Ton und den Ton, der einen Halbtonschritt weiter liegt!

c) Welche Frequenz hat der Ton D5? Welche Frequenz hat der Ton F4?

d) Welcher Ton hat eine Frequenz von 1046,5000 Hz? Welcher Ton hat eine Frequenz von 391,9954 Hz?

e) Auf einem üblichen Klavier ist der Kammerton die 49. Taste. Welche Frequenz hat der Ton, der erklingt, wenn man die erste Taste anschlägt und wie heißt er? Welche Frequenz hätte der Ton, der auf der Taste links neben der ersten Taste läge?

f) Bestimmen Sie eine Funktion f, sodass f(x) die Frequenz der x-ten Taste auf dem Klavier angibt.

f*) Bestimmen Sie eine Funktion wie in f), in der keine gerundeten Werte auftauchen.

g) Die höchste Frequenz, die man mit einem üblichen Klavier spielen kann, beträgt ca. 4186,0090 Hz. Wie viele Tasten hat ein solches Klavier? Wie viele davon sind weiß, wie viele schwarz?

h) Auf einigen großen Konzertflügeln werden links noch einige tiefe Töne ergänzt. Der tiefste Ton hat dann eine Frequenz von 16,3516 Hz. Auf der wievielten Taste liegt dann der Kammerton A4?


Konzentriertes Mädchen am Klavier

© Damir Cudic, iStockphoto (www.istockphoto.com)

i) Der Mensch kann Frequenzen zwischen ca. 16 Hz und 18 000 Hz wahrnehmen. Wie viele Tasten müsste ein Klavier haben, um den gesamten Hörbereich abzudecken, wenn die niedrigste Taste dann den Ton mit einer Frequenz von 16 Hz erzeugen würde? Wie breit wäre ein solches Klavier, wenn eine Taste im Schnitt 1,4 cm breit ist?

Hinweis: In Wirklichkeit sind die Tasten etwas breiter. Da sich die schwarzen Tasten jedoch zwischen den weißen Tasten befinden, führt die hier angegebene Breite zu einer guten Näherung.

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 2 Die Mathematik im Klavier – Aufgaben

a) Da die Töne genau eine Oktave über bzw. unter dem Kammerton liegen, beträgt die Frequenz von

$$\text{A3 genau: } \frac{1}{2} \cdot 440 = 220 \text{ [Hz]}$$

und die Frequenz von

$$\text{A5 genau: } 2 \cdot 440 = 880 \text{ [Hz].}$$

b) Eine Oktave besteht aus 12 Halbtönen. Der Faktor, mit dem man einen Ton multiplizieren muss, um zur nächsthöheren Oktave zu gelangen, beträgt 2. Da die Faktoren immer gleich sind (aufgrund des exponentiellen Wachstums) beträgt der Faktor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen: $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946\ldots$

Dieser Aufgabenteil ist einer der kniffligsten und gleichzeitig wichtig als Vorbereitung auf die nächsten Aufgabenteile. Unterstützen Sie Ihre Schüler an dieser Stelle, falls dies nötig ist, um ihnen die Bearbeitung der folgenden Aufgaben zu ermöglichen.

c) Der Ton D5 liegt 5 Halbtonschritte über A4 (A4 – Ais4/B4 – H4 – C4 – Cis4/Des4 – D5) und hat damit eine Frequenz von:

$$440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^5 \approx 587{,}3295 \text{ [Hz].}$$

Der Ton F4 liegt 4 Halbtonschritte unter A4 (F3 – Fis3/Ges3 – G3 – Gis3/As3 – A4) und hat daher eine Frequenz von:

$$440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-4} \approx 349{,}2282 \text{ [Hz].}$$

Man beachte: Zwischen H und C liegt nur ein Halbtonschritt!

d) Es gilt:

$$440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^x = 1046{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{\sqrt[12]{2}}\left(\frac{1046{,}5}{440}\right) = \frac{\ln(1046{,}5/440)}{\ln \sqrt[12]{2}} \approx 14{,}99 \ (\approx 15).$$

15 Halbtonschritte über A4 liegt der Ton C6 (12 Schritte → A5; A5 – Ais5/B5 – H5 – C6), welcher dann also eine Frequenz von 1046,5000 Hz hat. Weiterhin gilt:

$$440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^x = 391{,}9954 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{\sqrt[12]{2}}\left(\frac{391{,}9954}{440}\right) \approx -2.$$

Zwei Halbtonschritte unter A4 liegt G4 (G4 – Gis4/As4 – A4). Dies ist der gesuchte Ton.

Einige (insbesondere ältere) Taschenrechner haben den Logarithmus zu beliebiger Basis nicht implementiert, sondern nur den dekadischen und den natürlichen Logarithmus. Aufgrund des Logarithmengesetzes: $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ lassen sich jedoch die Ausdrücke trotzdem berechnen.

Die Lösung der ersten Gleichung erhält man beispielsweise durch Eingabe von:

$$\frac{\log_{10}(1046{,}5/440)}{\log_{10}\sqrt[12]{2}} \text{ oder } \frac{\ln(1046{,}5/440)}{\ln\sqrt[12]{2}}.$$

Analog kann man in den weiteren Rechnungen verfahren.