Das Fermat'sche Prinzip – ein Anwendungsbeispiel zur Differenzialrechnung

Axel Donges, Isny im Allgäu

Quelle: Wikimedia Commons (gemeinfrei).

Abb. 1: Pierre de Fermat (1607–1665) – auf einem Kupferstich von François de Poilly dem Älteren

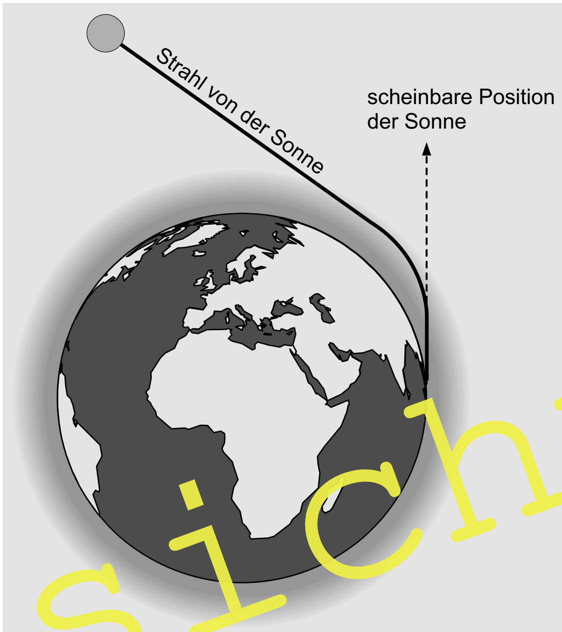

Abb. 2: Licht breitet sich nicht immer geradlinig aus (nicht maßstäblich).

Klasse: 11/12

Dauer: ca. 6 Stunden

Inhalt: Fermat'sches Prinzip
Extremwertaufgabe
Brechung und Reflexion

Ihr Plus: Fachübergreifender Unterricht (Physik)
Modellbildung
Vertiefung des Themas „Brechung und Reflexion"
Vertiefung der Differenzialrechnung

Wenn Sie Mathematiklehrerin oder Mathematiklehrer sind, liefert Ihnen dieser Beitrag zwei umfangreiche Übungsbeispiele zum Thema „Extremwertaufgaben". Als Physiklehrerin oder Physiklehrer sehen Sie darin eher eine elegante Herleitung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes. Beide Sichtweisen legen nahe, das Fermat'sche Prinzip im Unterricht zu thematisieren.

Didaktisch-methodische Hinweise

Historischer Rückblick

Pierre de Fermat wurde Anfang des 17. Jahrhunderts im südfranzösischen Beaumont-de-Lomagne geboren. Er studierte Jura an den Universitäten Toulouse, Bordeaux und Orléans. Nach seinem Studium arbeitete er als Anwalt und Richter. Fermat hatte großes Interesse an Mathematik. Er betrieb sie aber eher als Hobby. Nachdem er 1652 die Pest-Erkrankung überlebt hatte, starb er drei Jahre später in Castres. Sein wissenschaftlicher Nachlass besteht hauptsächlich aus Korrespondenzen mit anderen berühmten Mathematikern wie **Blaise Pascal** (1623–1662) und **René Descartes** (1596–1650).

Pierre de Fermat ist – zusammen mit René Descartes – der Begründer der **analytischen Geometrie**. Weiterhin arbeitete er auf dem Gebiet der **Zahlentheorie** und war an der Ausarbeitung der Grundlagen der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** beteiligt. Eine besondere Berühmtheit erlangte sein Name im Zusammenhang mit der **Fermat'schen Vermutung**. Diese Vermutung beschäftigte viele Generationen von Mathematikern. Sie wurde erst im Jahre 1994 bewiesen. Fermat hat sich auch mit Optik beschäftigt. Er verfeinerte und verallgemeinerte das damalige Wissen zu seinem **Prinzip der kürzesten Zeit** (oder: Fermat'sches Prinzip):

Abb. 3: Briefmarke zur Fermat'schen Vermutung

Licht läuft zwischen zwei Punkten stets auf dem Weg mit der kürzesten Laufzeit.

Woher kennt das Licht den kürzesten Weg?

Um diese Frage zu beantworten, muss die Wellennatur des Lichts und die damit verbundene Interferenz berücksichtigt werden. Die Laufzeiten des Lichts längs Wegen, die unmittelbar in der Nähe des Weges mit der kürzesten Laufzeit (des **Minimums**) liegen, variieren nur sehr gering. Lichtwellen, die sich auf diesen Wegen ausbreiten, interferieren konstruktiv. Bei benachbarten Lichtwegen, die nicht in der Nähe des Weges der kürzesten Laufzeit liegen, variieren die Laufzeiten stärker, weshalb destruktive Interferenz auftritt.

Diese Argumentation trifft auch zu, wenn der Graph der Laufzeit bei Variation des Weges einen Hoch- oder Sattelpunkt hat. Daher lautet das Fermat'sche Prinzip präziser:

Das Licht wählt stets denjenigen Weg zwischen zwei Punkten, bei dem die benötigte Laufzeit invariant gegen kleine Änderungen des Weges ist.

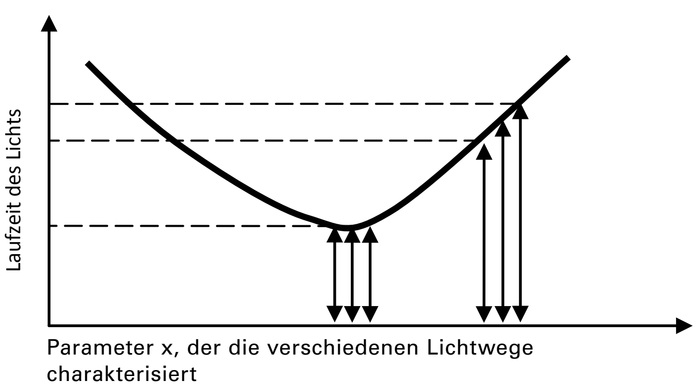

Abb. 4: Die Laufzeiten nahe des Minimums variieren kaum bei Variation von x.

Allerdings reicht im Rahmen der Schulphysik bzw. -mathematik die von Fermat selbst angegebene Formulierung aus, dass das Licht den Weg mit **minimaler** Laufzeit wählt. Die in diesem Abschnitt angesprochenen Aspekte (Interferenz, Variationsprinzip) werden daher in den nachfolgenden Materialien nicht thematisiert.

Auf einen Blick

Stunde 1: Wiederholung

Material	Thema
M 1	**Ableitung von Funktionen – frischen Sie Ihr Wissen auf!** Die mathematischen Grundlagen in Erinnerung rufen

Stunde 2–4: Vorstellung des Kernproblems

Material	Thema
M 2	**Lebensretter im Einsatz – jede Sekunde zählt!** Über den optimalen Weg nachdenken
M 3	**Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!** Den Weg des Rettungsschwimmers berechnen

Anwendung

Material	Thema
M 4	**Bedingung für die minimale Rettungszeit – das Brechungsgesetz** Bedingung für den schnellsten Rettungsweg bestimmen

Stunde 5/6: Mathematisierung und weitere Anwendungen

Material	Thema
M 5	**Das Fermat'sche Prinzip** Das Fermat'sche Prinzip erkennen
M 6	**Reflexion von Licht – Aufgabenstellung** Arbeitsauftrag zur Herleitung des Reflexionsgesetzes
M 7	**Reflexion von Licht – Lösung** Herleitung des Reflexionsgesetzes
M 8	**Optische Abbildungen – viele Wege führen nach Rom!** Es gibt manchmal viele mögliche Lichtwege

Minimalplan

Verfügen die Schüler über solide Kenntnisse der Differenzialrechnung, kann Material **M 1** ausgelassen werden. Für die Erarbeitung des Fermat'schen Prinzips sind dann nur die Materialien **M 2** bis **M 5** zu bearbeiten. Wenn noch Zeit zur Verfügung steht, können ein weiteres Beispiel (Reflexion **M 6–M 7**) und eventuell die optische Abbildung (**M 8**) behandelt werden.

M 1 Ableitung von Funktionen – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Wir betrachten eine ableitbare Funktion f(x); $x \in \mathbb{R}$. Die Ableitung dieser Funktion wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Anschauliche Bedeutung der Ableitung

Die Tangente an den Graphen G von f(x) im Kurvenpunkt B(u, f(u)) ist eine Gerade mit der Steigung $m = f'(u)$ durch B.

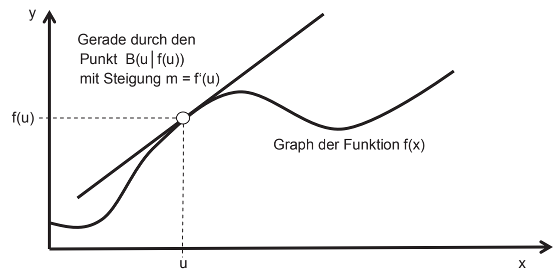

Abb. 5: Die Tangente an den Graphen G im Punkt B gibt die Steigung in B an.

Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

In einem Hoch-, Tief oder Sattelpunkt $P\left(v|f(v)\right)$ ist die Tangentensteigung null: $m = f'(v) = 0$ (notwendige Bedingung). Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung kann man schließen: $f''(v) > 0$: Tiefpunkt; $f''(v) < 0$: Hochpunkt; $f''(v) = 0$: Sattelpunkt, falls $f'''(v) \neq 0$.

Einige Regeln zur Berechnung von Ableitungen (a: Konstante)

Funktion:	$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$
Funktion:	$f(x) = a \cdot g(x)$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Funktion:	$f(x) = h(u(x))$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = \underbrace{h'(u(x))}_{\text{Ableitung nach u}} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\text{(innere) Ableitung nach x}}$
Funktion:	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
Funktion:	$f(x) = ax$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = a$
Funktion:	$f(x) = ax^2$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = 2ax$
Funktion:	$f(x) = \sqrt{x}$	abgeleitete Funktion:	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2$; $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Tangentensteigung m des dazugehörigen Graphen im Kurvenpunkt $B\left(2|12\right)$.
2. Leiten Sie die Funktion $f(x) = 7x + 12x^2$ ab.
3. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x - 2}$.
4. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{4 + (6 - x)^2}$.
5. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{x}}$.

M 3 Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!

Der rot gezeichnete, krummlinige Weg ist offensichtlich nicht der schnellste. Aber auch die blau eingezeichnete direkte Verbindung führt nicht in kürzester Zeit zum Ertrinkenden. Die **optimale Route** setzt sich aus zwei geraden Teilstücken zusammen (grüner Weg). Dabei ist zu beachten, dass sich der Retter auf dem Land schneller als im Wasser fortbewegen kann.

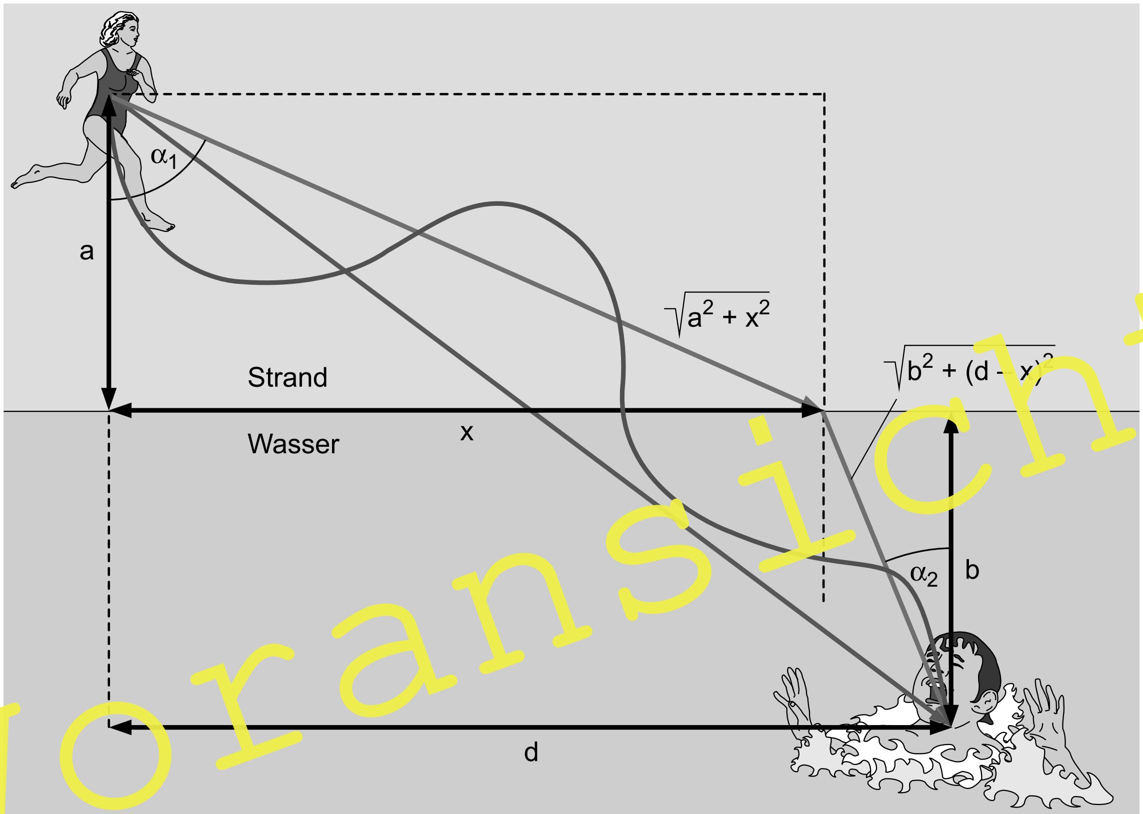

Abb. 8: Es gibt verschiedene Wege von der Rettungsschwimmerin zum Ertrinkenden.

Quantitativ folgt mithilfe des **Satzes von Pythagoras** für die Längen der grünen Teilstrecke am Strand und im Wasser $y_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ bzw. $y_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$ (siehe Abb. 8). Für die beiden Teilstrecken benötigt die Rettungsschwimmerin daher jeweils die Zeiten $t_1 = \sqrt{a^2 + x^2}/v_1$ und $t_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}/v_2$. Hierbei sind v_1 bzw. v_2 die Geschwindigkeiten der Rettungsschwimmerin an Land bzw. zu Wasser. Für die Gesamtzeit t_g gilt somit in Abhängigkeit von der Strecke x

$$t_g(x) = t_1 + t_2 = \sqrt{a^2 + x^2}/v_1 + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}/v_2\,. \qquad (1)$$

Arbeitsauftrag

Fertigen Sie ein x-t_g-Diagramm für a = 30 m, b = 30 m, d = 200 m, v_1 = 5,0 m/s und v_2 = 1,0 m/s an und skizzieren Sie maßstäblich den schnellsten Weg.

Tipp

Lösung: siehe Material **M 4**.

M 3 Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!

Abb. 7: Welchen Weg soll die Rettungsschwimmerin wählen?

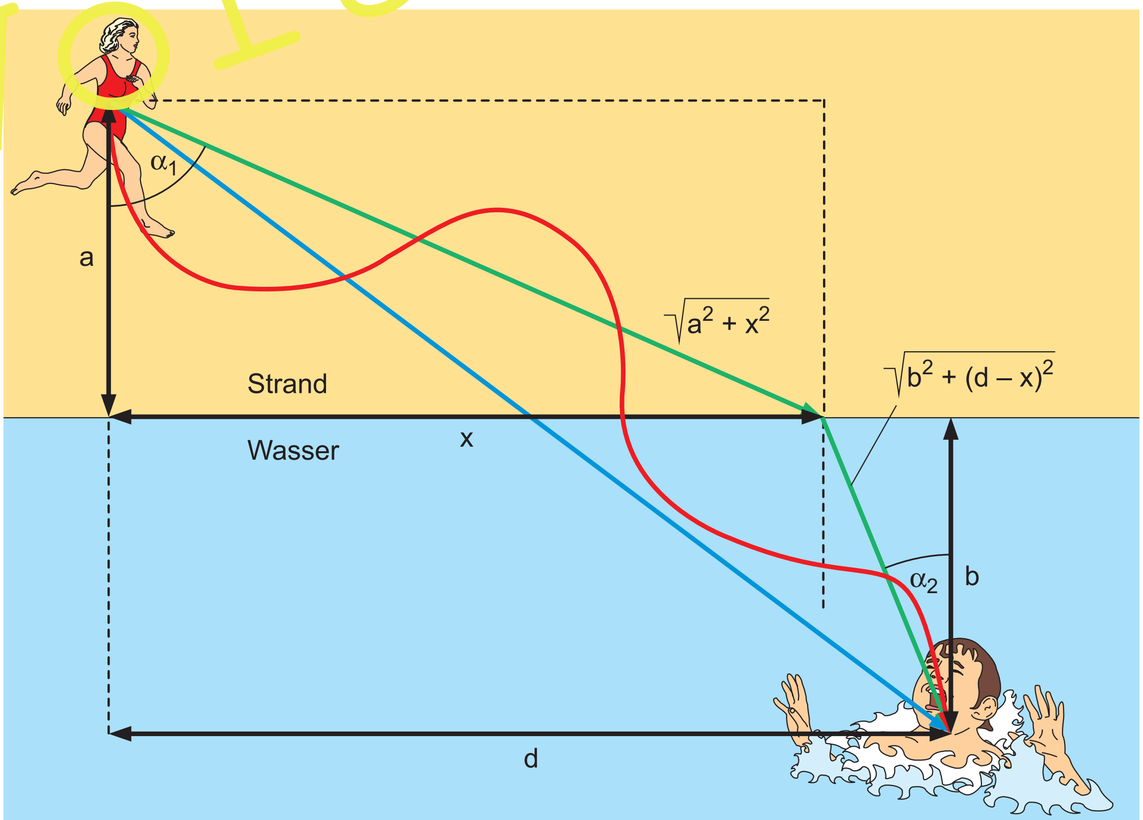

Abb. 8: Es gibt verschiedene Wege von der Rettungsschwimmerin zum Ertrinkenden.

M 6 Reflexion von Licht – Aufgabenstellung

Im Material **M 5** haben Sie das **Fermat'sche Prinzip** kennengelernt. Das Fermat'sche Prinzip ist grundlegend für die Optik. Es lässt sich auch auf andere Phänomene anwenden. Wir betrachten im Folgenden die **Reflexion an einem ebenen Spiegel**.

Wir suchen im Weiteren den Weg, den das Licht zwischen den Punkten P_1 und P_2 in Abbildung 15 wählt. Dabei lassen wir den trivialen Fall, dass das Licht direkt von P_1 zu P_2 läuft, außer Acht. Wir konzentrieren uns auf den Fall, dass der Lichtstrahl am Spiegel reflektiert wird. Damit die Laufzeit des Lichts <u>minimal</u> wird, breitet sich das Licht von P_1 zum Spiegel und weiter zu P_2 auf geraden Teilstücken aus.

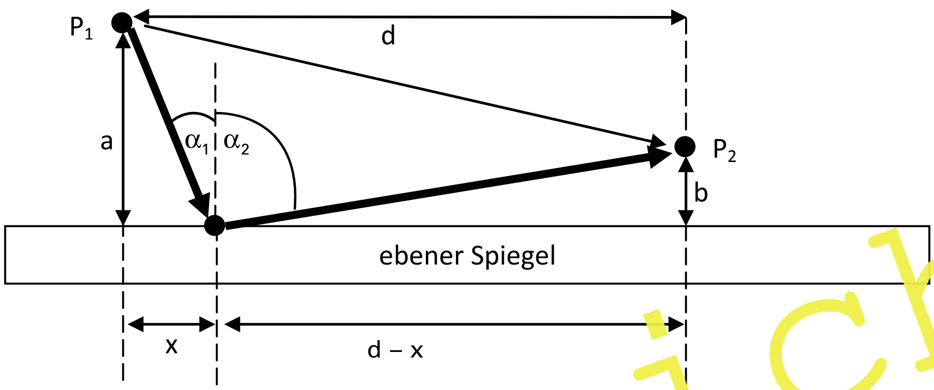

Abb. 15: Zur Reflexion von Licht an einem ebenen Spiegel

Arbeitsauftrag

1. Berechnen Sie für beliebige Strecken x die Länge $L_g(x)$ des Lichtweges von P_1 über den Spiegel zu P_2.
2. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $L_g(x)$ für a = b = 1 m und d = 2 m.
3. Welche Bedingung gilt für den kürzesten Weg? Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Winkel α_1 und α_2 aus.

Hinweis: Das Licht hat überall die gleiche Geschwindigkeit.

Tipp

Lösung: siehe **M 7**.

Abb. 16: Licht wird an der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser reflektiert.

Lösungen

M 1 Ableitung von Funktionen – frischen Sie Ihr Wissen auf!

1. $f(x) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 6x \quad \rightarrow \quad m = f'(2) = 12$

2. $f(x) = 7x + 12x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 7 + 24x$

3. $f(x) = \sqrt{x-2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

4. $f(x) = \sqrt{4+(6-x)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4+(6-x)^2}} \cdot 2 \cdot (6-x) \cdot (-1) = \dfrac{x-6}{\sqrt{4+(6-x)^2}}$

5. $f(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x} - \dfrac{3-x}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{x + \dfrac{3-x}{2}}{x^{3/2}} = -\dfrac{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^{3/2}} = -\dfrac{x+3}{2\,x^{3/2}}$

M 4 Bedingung für die minimale Rettungszeit – das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1 = \frac{200\,000 \text{ km/s}}{300\,000 \text{ km/s}} \sin(45^\circ) = 0{,}471 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 28^\circ$$

M 5 Das Fermat'sche Prinzip

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade. Da sich das Licht überall gleich schnell ausbreitet (homogenes Medium), braucht es auf der kürzesten Verbindung auch die wenigste Zeit. Das Licht wählt daher diesen Weg.

M 8 Optische Abbildungen – viele Wege führen nach Rom

b) Da das Seil eine konstante Länge besitzt, sind alle möglichen Stecken vom ersten Pfosten (1. Brennpunkt) bis zur Ellipse und zurück zum zweiten Pfosten (2. Brennpunkt) gleich lang, sofern das Seil immer straff gehalten wird.

Im Zusammenhang mit dem Fermat'schen Prinzip bedeutet das: Ein Lichtstrahl, der durch den Brennpunkt einer Ellipse in beliebige Richtung geht, wird an einer innenseitig verspiegelten Ellipse so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt läuft. Es gibt also unendlich viele, gleich schnelle Lichtwege (Abb. 21).

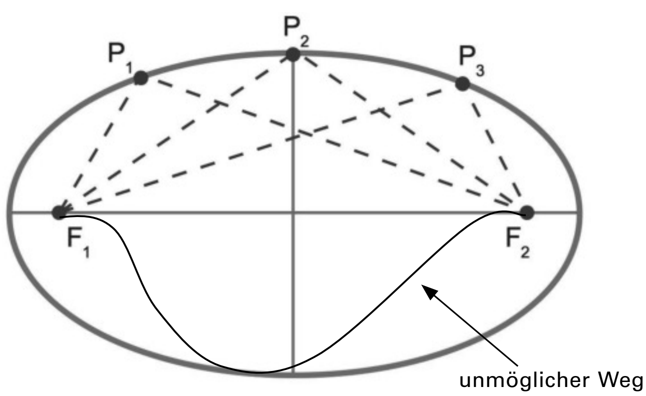

Abb.21: Mögliche (gestrichelte) und nicht mögliche (durchgezogene) Lichtwege vom Brennpunkt F_1 zum Brennpunkt F_2 eines elliptischen Spiegels