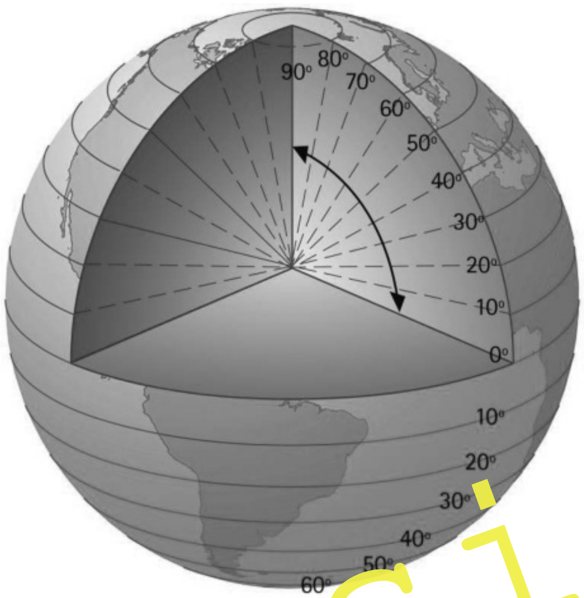
Figuren, Koordinatensysteme und Symmetrie

Florian Borges, Traunstein



Die Breitenkreise

Klasse: 5/6

Dauer: 6–9 Stunden

Inhalt: Ebene Figuren und räumliche Körper, Ortsbeschreibungen durch kartesische Koordinaten bzw. durch Längen- und Breitengrade auf der Erde, Achsen- und Punktsymmetrie in Ebene und Raum

Ihr Plus:

- ✓ Optionaler Einsatz der dynamischen Geometriesoftware *GeoGebra*[1] mit den Startdateien ***asy1.ggb*** für die Achsen- bzw. ***pusy1.ggb*** für die Punktsymmetrie
- ✓ Optionaler Einsatz des Atlas bzw. von Google-Maps o. Ä. zur geografischen Koordinatenbestimmung
- ✓ Lernerfolgskontrolle

Diese Materialien bieten Ihnen eine umfassende Wiederholung vieler Themengebiete der Grundschule, um alle Schüler auf ein Niveau zu bringen. Der Fokus der Materialien liegt hierbei auf dem Alltagsbezug. So erkennen Ihre Lernenden, dass in vielen alltäglichen Dingen Mathematik steckt.

[1] https://www.geogebra.org/download?lang=de

Didaktisch-methodische Hinweise

Inhalte des Beitrags

Symmetrien sind den Kindern bereits aus dem Grundschulunterricht geläufig. Auch der Umgang mit **Koordinatensystemen** bereitet meist kaum Schwierigkeiten, wenn ausreichend geübt wird. Das **Gradnetz der Erde** wird im Geografie-Unterricht behandelt und bietet sich hier zur alternativen Lagebeschreibung von Orten an. Die Erzeugung symmetrischer Formen durch **Spiegelungen** unterscheidet klar zwischen dem Vorgang der Spiegelung und dem Zustand der Symmetrie. Schließlich bietet sich als physikalische Anwendung der allen Kindern bekannte, ebene Spiegel an, dessen eigentliche Funktion vielen nicht bewusst ist.

Lehrplanbezug

Die vorliegende Lerntheke vertieft zum einen prozessbezogene Kompetenzen, wie z. B. *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* umzugehen, zum anderen geht sie auf die **geometrischen Grundbegriffe** sowie die **Medienkompetenz** ein.

Vorbereitung der Lerntheke

Kopieren Sie die Materialien **M 1–M 9** in Klassenstärke und laminieren Sie jeweils ein Exemplar, das Sie mit den Kopien auf der Fensterbank auslegen. Teilen Sie die Schüler in Arbeitsgruppen ein. Ein Schüler pro Gruppe holt die Materialien jeweils in Gruppenstärke ab. Für Material **M 2** sollten **Schere** und **Klebestreifen** vorhanden sein, um eine Pyramide basteln zu können. Gemeinsam erarbeitet jede Gruppe die Lösungen für die Materialien **M 1–M 9** und fertigt ggf. jeweils eine **Folie** mit den Aufgabenlösungen an. Diese Folie stellt dann zum Ende der Stunde ein Gruppenmitglied dem Plenum vor. Bei Bedarf werden die Lösungen gemeinsam korrigiert.

Vorkenntnisse

Ihre Schüler sollten die **ebenen Figuren** sowie **räumliche Körper** und deren **Netze** kennen. Für Material **M 4** müssen Ihre Lernenden Kenntnisse über Koordinatensysteme und das Einzeichnen von Punkten haben. Für die Materialien **M 6–M 8** sollten die **Achsen-**, **Dreh-** sowie **Punktsymmetrie** bekannt sein.

Zur dynamischen Geometriesoftware

Die dynamische Geometriesoftware ***GeoGebra*** bietet die **Punkt- und die Achsenspiegelung** beliebiger Objekte einschließlich „**Spuroption**“ an, sodass die Kinder beispielsweise durch Verschieben eines Ausgangspunktes dessen Spur sowie dessen Bildpunktspur als symmetrische Gebilde entstehen sehen. Die mitgelieferten „Startdateien“ ***asy1.ggb*** und ***pusy1.ggb*** beinhalten ein Strichmännchen, das durch zwei Punkte festgelegt ist. Verschiebt man diese, ändert sich das Gesamtbild „in Echtzeit“. Pfiffige Schüler haben hier sicher weitere tolle Ideen. Aber auch das „Schreiben“ des eigenen Vornamens am Bildschirm durch Verschieben eines Punktes (mit Spur) lässt die Spiegelschrift daneben entstehen, bereitet den Kindern große Freude und motiviert so für das Thema.

Ablauf des Arbeitens an der Lerntheke

Steigen Sie mit einer Wiederholung bereits bekannter Themengebiete (**M 1** und **M 2**) ein. Beginnen Sie in Kleingruppen mit Material **M 2** und thematisieren Sie dabei die Stabilität des Dreiecks sowie die „Familie“ der Vierecke. In Material **M 3** stehen deren **Netze** im Fokus sowie das unlösbare Problem, eine Kugelfläche eben darzustellen. Nebenbei wird hier auch die **Innenwinkelsumme bei Vielecken** sowie spielerisch die Unterscheidung von **notwendigen und hinreichenden Bedingungen** behandelt. Das ebene, kartesische Koordinatensystem wird in Material **M 4** thematisiert, auch ein Ausblick auf die räumliche 3-D-Variante der Oberstufe fehlt nicht. Das Gradnetz der Erde behandeln Sie in Material **M 5**. Die **Achsensymmetrie** folgt am Beispiel der Großbuchstaben in

Auf einen Blick

Einstieg

Sammeln Sie die Vorkenntnisse der Kinder: Welche geometrischen Formen sind ihnen bekannt? Können die Kinder die Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem ablesen? Welche Besonderheiten hat die Form eines Schmetterlings oder eines Herzes?

Material	Thema	Stunde
M 1 mit Folie	**Das Haus der Vierecke** Die Eigenschaften geometrischer Figuren kennenlernen und systematisieren	1.
M 2 (Wh)	**Einfache ebene Figuren – wiederhole dein Wissen!** Je nach Behandlungstiefe der Unterthemen „notwendige und hinreichende Bedingungen“ und „Winkelsumme in Vielecken“ sind hier 1 oder 2 Stunden einzuplanen.	
M 3 (Wh)	**Einfache räumliche Körper – wiederhole dein Wissen!** Die Bezeichnungen für Körper wiederholen, Skizzieren und Basteln eines Netzes von Kegeln bzw. einer Dreieckspyramide	2.
M 4	**Koordinatensysteme, 1. Teil** Kartesisches Koordinatensystem (eben, räumlich)	3.
M 5	**Koordinatensysteme, 2. Teil** Gradnetz der Erde (PC-Einsatz etwa mit Google-Maps bietet sich an), Angabe von Sternpositionen in der Astronomie	4.
M 6 mit optionaler Folie	**Buchstabensalat – die Achsensymmetrie** *GeoGebra*-Einsatz am PC bietet sich hier an. Palindrome als symmetrische Wortspiele eignen sich.	5.
M 7	**Punktsymmetrie** Vorgehen bei einer Punktspiegelung Möglicher Einsatz von *GeoGebra* am PC	6.
M 8	**Weitere Symmetrien** Möglicher Einsatz von Google-Maps zur Bestimmung der Symmetrieebenen	7.
M 9	**Spieglein, Spieglein an der Wand ...** Funktionsweise eines Spiegels	8.
M 10 (LEK)	**Fit für den Abschlusstest? – Teste dich selbst!** 10 Aufgaben zu allen Themen	9.

Minimalplan

Prinzipiell können Sie die Materialien unabhängig voneinander einsetzen. Es empfiehlt sich jedoch, die Materialien zu einem Themengebiet vollständig zu behandeln:

Grundlagen Figuren und Körper (**M 1**–**M 3**); Koordinatensysteme (**M 4** und **M 5**); Symmetrien (**M 8**).

Wichtig: **M 7** greift auf das **M 2** zurück. Für **M 8** wird **M 3** benötigt.

M 1 Das Haus der Vierecke

Aufgabe

Beschreibe das Haus der Vierecke und erkläre den Aufbau.

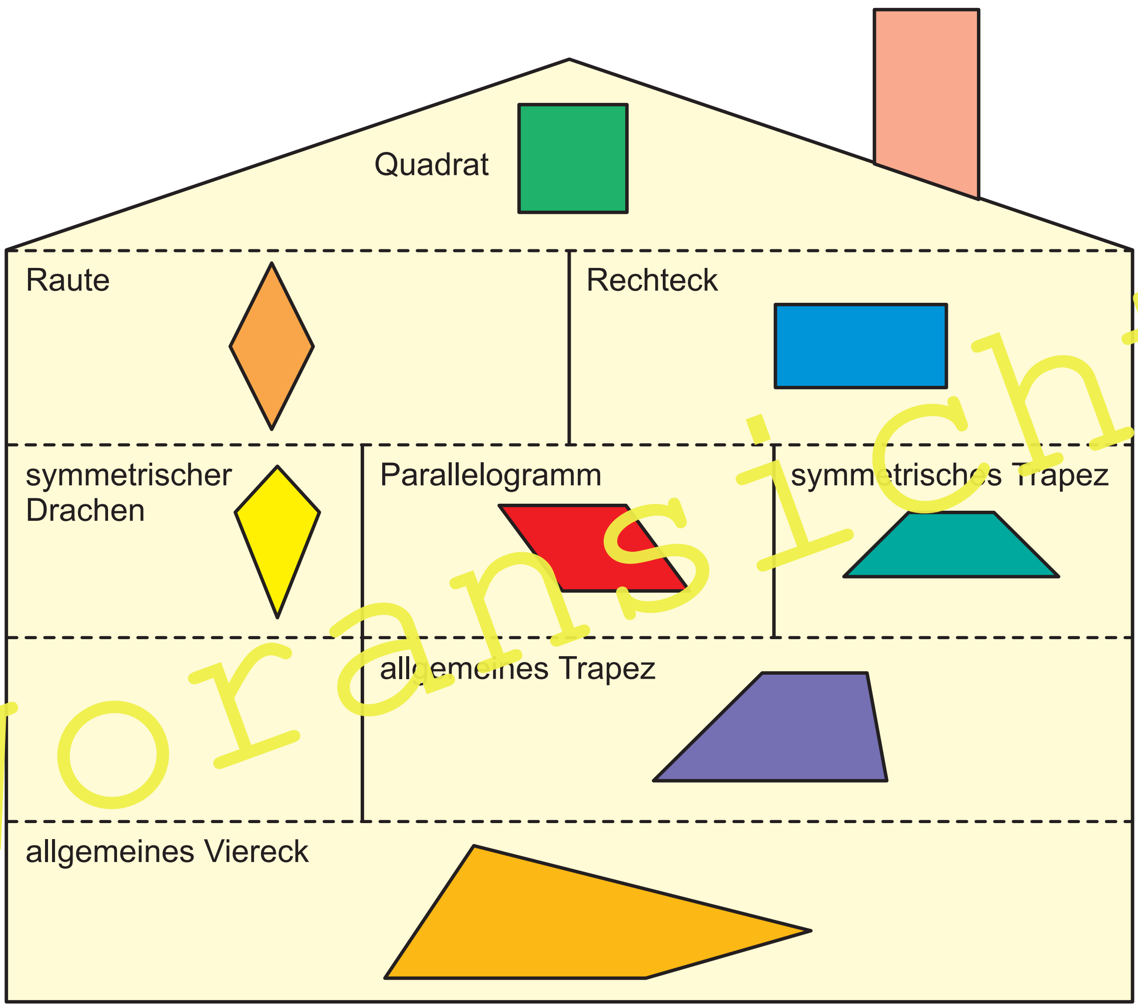


Abb. 1: Das Haus der Vierecke

Lösung

Das Haus der Vierecke besteht aus unterschiedlichen Stockwerken, mit deren Hilfe die Beziehungen der Figuren zueinander dargestellt werden.

Die Figuren, die in einem höheren Stockwerk sind, haben auch die Eigenschaften einer Figur aus einem niedrigeren Stockwerk.
Beispiel: Ein *Rechteck* ist ein *Parallelogramm*, aber **kein** *Quadrat*.

M 2 Einfache ebene Figuren – wiederhole dein Wissen!

Mit einem Lineal kannst du gerade Linien („Strecken“) zeichnen, mit dem Zirkel Kreise.

Merke:

Einen geschlossenen Streckenzug aus 3 Strecken nennt man **Dreieck**, aus 4 Strecken **Viereck**, aus 5 Strecken **Fünfeck**, aus n Strecken **„n-Eck“** (n ist dabei eine natürliche Zahl).

© Hemera/Thinkstock
Alexey Baskakov

Abb. 2: Stabile Dreiecke werden bei Brücken genutzt.

Dreiecke sind **sehr stabil**, die Innenwinkel stehen dann fest.

Winkelsummensatz:

Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Achtung: Ein **Viereck** wird erst stabil, wenn man eine **Diagonale** einbaut.

Die Stabilität des Dreiecks ist der Grund für seine Verwendung bei **Stahlbrücken**, **Kranen** und anderen stark belasteten Bauteilen. Besondere Dreiecke sind das gleichschenklige Dreieck, das gleichseitige Dreieck und das rechtwinklige Dreieck. Dreiecke sind immer eben.

Die „Familie“ der ebenen Vierecke:

Bei den (ebenen) Vierecken unterscheidet man **Drachen**, **Trapez**, **Rechteck**, **Parallelogramm, Raute, Quadrat**.

Aufgaben

1. Gib drei Streckenlängen a, b und c so an, dass kein Dreieck daraus gebildet werden kann. Versuche eine **Regel** zu finden: Unter welchen Voraussetzungen für die Seitenlängen a, b und c ist es möglich, ein Dreieck zu bilden?
2. Zeichne ein gleichschenkliges und ein rechtwinkliges Dreieck.
3. Nenne ein Beispiel für einen Körper.
4. *„Jeder Dackel ist ein Hund, aber nicht jeder Hund ist ein Dackel!“*

   Formuliere entsprechende Aussagen über Drachen, Trapeze, Rechtecke, Parallelogramme, Quadrate und Rauten.

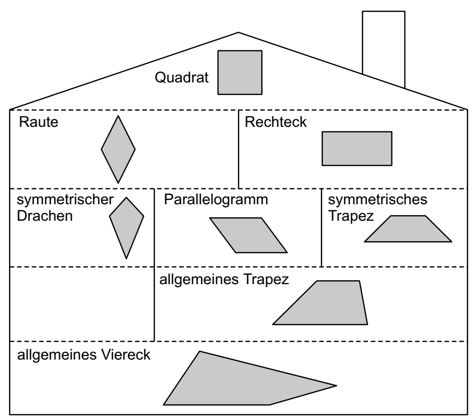


Abb. 3: Das Haus der Vierecke

5. Zeichne verschiedene Vier-, Fünf-, n-Ecke und bestimme jeweils die Innenwinkelsumme. Begründe die Regel.

Merke: Ein n-Eck hat eine Innenwinkelsumme von (n – 2) 180°.

M 4 Koordinatensysteme, 1. Teil

Koordinatensysteme sind notwendig, um Ortsangaben eindeutig beschreiben zu können.

Die **Koordinaten eines Punktes** beschreiben seine Lage im Koordinatensystem so, wie Stadt, Straße und Hausnummer (ggf. noch Stockwerk) den Wohnort eines Postkunden beschreiben, dem der Zusteller eine Sendung bringen muss.

Die erste Angabe ist die **x-**, die zweite die **y-Koordinate**.

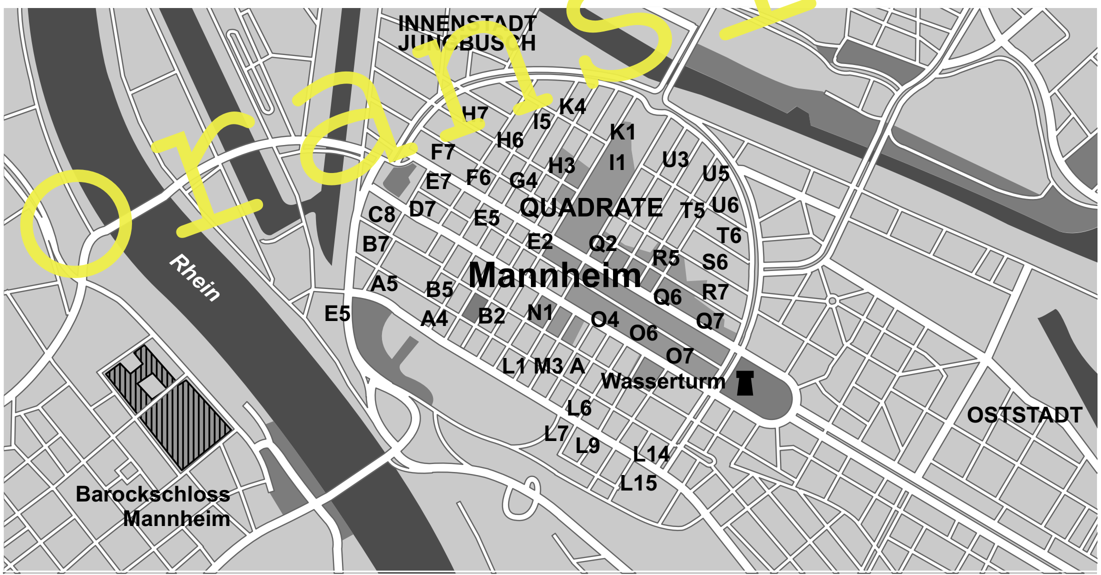
Später in der Oberstufe kommt dann noch eine dritte Koordinate dazu (meistens nennt man sie **z-Koordinate**), und schon kann man nicht nur die ganze Ebene adressieren (also links-rechts und oben-unten), sondern den ganzen **Raum** (also auch vorne-hinten).

Aufgaben

1. Zeichne in dein Heft ein Koordinatensystem und trage folgende Punkte ein: A(3|2), B(5|3), C(3|6), D(1|3). Verbinde die Punkte zu einem Viereck ABCD. Wie heißt die entstandene Figur?

2. Die Innenstadt von Mannheim ist teilweise so adressiert wie in einem Koordinatensystem: Die Parallelstraßen in der einen Richtung werden mit A, B, C, D usw. „durchnummeriert“, senkrecht dazu die anderen Straßen mit 1, 2, 3 usw. Deshalb kann jemand durch die Anschrift von z. B. P7 eindeutig den dortigen Wohnblock finden.

   Recherchiere diese „**Mannheimer Quadrate**“ im Internet.



3. Zeichne ein Koordinatensystem und trage die Punkte M(5|2) sowie N(5|8) ein. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kreise um M bzw. N mit Radius 5.

   Welche Form hat das Viereck aus den beiden Kreismittelpunkten und den Schnittpunkten?

4. Wo im Koordinatensystem liegen alle Punkte mit *gleicher* x- und y- Koordinate?

M 6 Buchstabensalat – die Achsensymmetrie

In der Tabelle sind die Großbuchstaben in drei Gruppen aufgeteilt: Alle Buchstaben in Gruppe 1 haben eine Eigenschaft gemeinsam, alle der Gruppe 2 eine andere, die der Gruppe 3 keine der beiden Eigenschaften. Findest du die gesuchten Eigenschaften?

Tipp Setze Wörter zusammen aus Buchstaben nur einer Gruppe, also etwa AUTOMAT bei Gruppe 1 oder HOCHEICHE bei Gruppe 2.

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3
A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y	B, C, D, E, H, I, K, O, X	F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z

Musterlösung:

Buchstaben der Gruppe 1	Buchstaben der Gruppe 2
symmetrisch zu einer senkrechten Achse **O** **M** **A**	symmetrisch zu einer waagerechten Achse **EICHE**

Wörter aus „Gruppe-2-Buchstaben“ kann man um eine waagrechte Achse nach unten (oder oben) klappen und trotzdem lesen, bei „Gruppe-1-Buchstaben“ geht das mit einer senkrechten Achse.

Bei der Achsenspiegelung gilt allgemein:

Die Verbindungsstrecke $\overline{AA'}$ von Punkt A und Bildpunkt A‘ schneidet die Spiegelachse (hier $\overline{PQ}$) senkrecht und mittig:

Dabei ist die Achsenspiegelung ein ***Vorgang***, die Achsensymmetrie der ***Zustand***, der sich daraus ergibt.

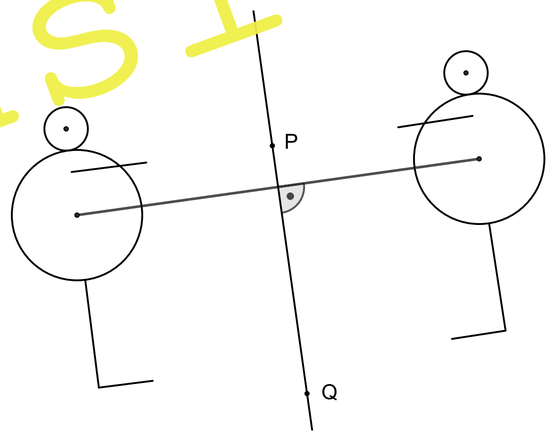
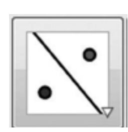


Abb. 9: Achsenspiegelung

Aufgaben

1. Finde jeweils drei Wörter mit Buchstaben, die nur aus Gruppe 1 bzw. nur aus Gruppe 2 stammen.
2. Starte die kostenfreie Software ***GeoGebra.*** Lege eine Gerade $\overline{PQ}$ als Symmetrie- bzw. Spiegelachse fest und „zeichne“ auf einer Seite dieser Geraden Objekte (Kreise, Strecken, Vielecke). Spiegle diese Objekte an der Geraden $\overline{PQ}$. Der Button dafür ist rechts abgebildet. Schalte beim Spiegelbild dann auch die „Spur“ ein (Menü rechte Maustaste!).

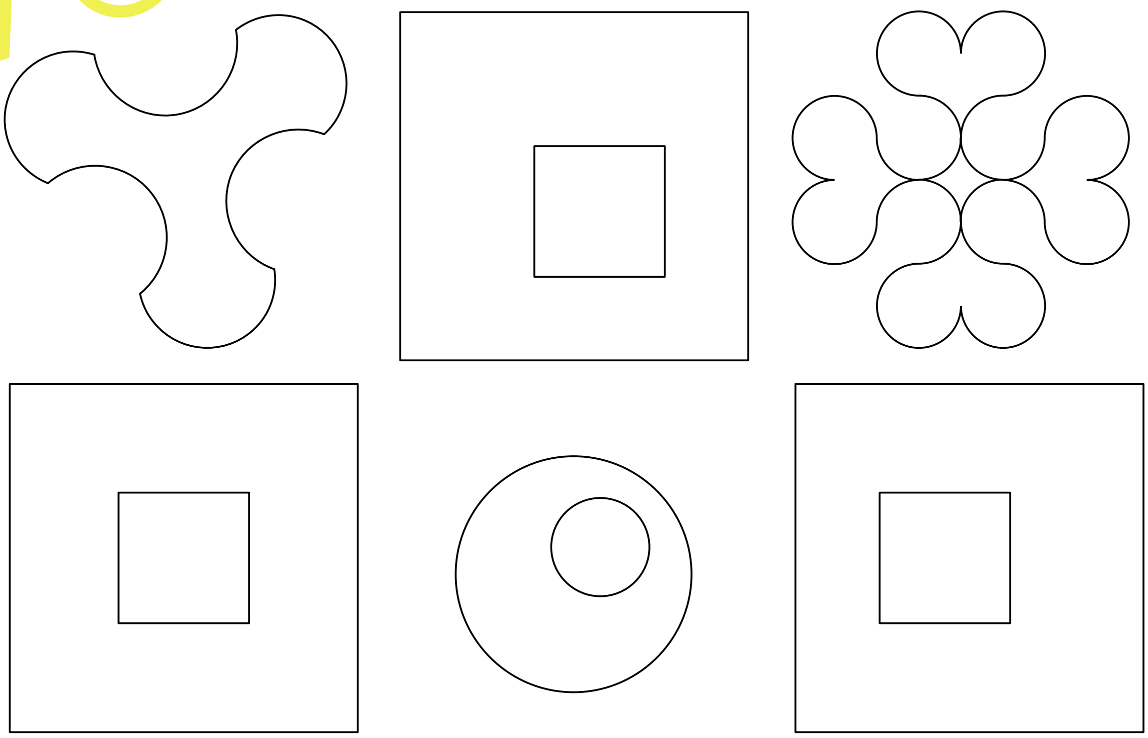


3. Finde weitere, lustige **Palindrom-Wörter** (z. B. *„GNUDUNG“*) oder gar -Sätze wie *„Trug Tim eine so helle Hose nie mit Gurt?“*, die rückwärts gelesen gleich sind, also beinahe „achsensymmetrisch“.
4. Finde alle Symmetrieachsen der Figuren auf der folgenden schwarz-weißen Folienvorlage.

M 6 Schwarz-Weiß Folienvorlage zur Achsensymmetrie

Ein Beispiel aus der Natur: Blüten mit fünfachsiger Symmetrie

Zeichne jeweils alle Symmetrieachsen ein.



M 7 Punktsymmetrie

Bei der **Achsensymmetrie** (vgl. **M 6**) lagen zwei zueinander symmetrische Punkte auf einem Lot zur Symmetrieachse gegenüber im gleichen Abstand von dieser.

Bei der **Punktsymmetrie** aber befinden sich die zwei symmetrischen Punkte vom Symmetriezentrum aus gesehen einander gegenüber im gleichen Abstand von der Achse.

Bei den Großbuchstaben von Material **M 6** gibt es mehrere solcher Punktsymmetrien, beispielsweise das Z:

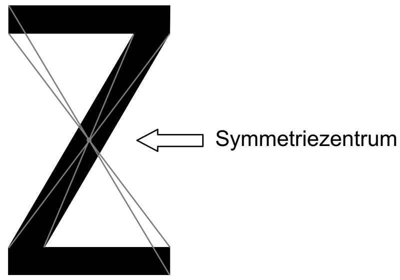


Abb. 10: Das Z – ein punktsymmetrischer Buchstabe

Abb. 11: Das S – ein punktsymmetrischer Buchstabe

Wie bei der Achsenspiegelung und Achsensymmetrie unterscheidet man auch hier zwischen dem *Vorgang* der ***Punktspiegelung*** und dem daraus entstehenden *Zustand* der ***Punktsymmetrie***:

Spiegelt man die eine Hälfte des Buchstabens „S“ am Symmetriezentrum, dann erhält man die andere Hälfte.

Man kann die Punktspiegelung aber auch ersetzen durch eine **Halbdrehung um das Zentrum** bzw. durch eine **Zweifach-Achsenspiegelung**, wobei sich die Achsen im Zentrum senkrecht schneiden:

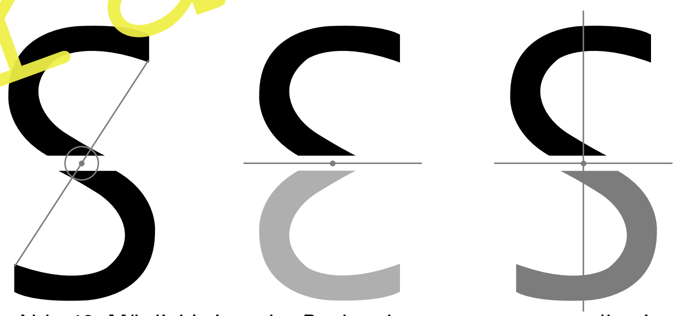


Abb. 12: Möglichkeiten der Buchstabenerzeugung anstelle einer Punktspiegelung

Aufgaben

1. Welche der abgebildeten Vierecke vom Material **M 2** sind achsen-, welche sind punktsymmetrisch? Zeichne die Symmetriezentren bzw. -Achsen ein!
2. Welche Dreiecke, Fünfecke, Sechsecke sind achsen-, welche punktsymmetrisch?
3. „Zeichne“ mit der dynamischen Geometriesoftware *GeoGebra* ein Symmetriezentrum P auf den Bildschirm sowie einen weiteren Punkt A. Bilde mit dem Menüpunkt „**Punktspiegelung**“ den bzgl. P punktsymmetrischen Punkt A′. Schalte dann bei A und A′ mit der rechten Maustaste die „**Spur**“ ein und verschiebe A so, dass seine Spur deinen Vornamen schreibt. Kannst du die Spur von A′ „lesen“?
4. Suche in Zeitschriften bzw. im Internet nach punktsymmetrischen Figuren und Bildern. Sammelt diese auf einem großen **Plakat** im Klassenzimmer.

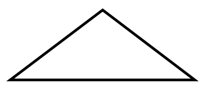
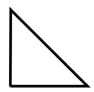
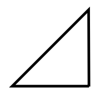
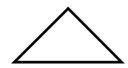
Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 2 Einfache ebene Figuren – wiederhole dein Wissen!

1. Beispiel: a = 10 cm, b = 2 cm, c = 4 cm

   Ein Dreieck lässt sich nur bilden, wenn die Summe zweier Seitenlängen stets größer ist als die dritte (**Dreiecksungleichung**).

2. Beispiele:

Gleichschenkliges Dreieck	**Rechtwinklige Dreiecke**		
			

3. Beispiele: Würfel, Quader, Prisma, Pyramidenstumpf, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel

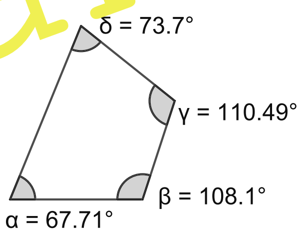
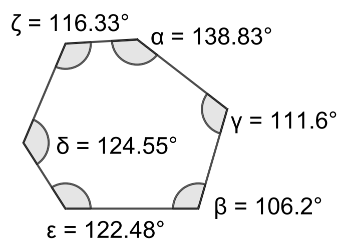
4. Jedes Quadrat ist ein Rechteck, aber nicht jedes Rechteck ist ein Quadrat.

   Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm, aber nicht jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.

   Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez, aber nicht jedes Trapez ist ein Parallelogramm.

   Jede Raute ist auch ein Drachen, aber nicht jeder Drachen ist eine Raute.

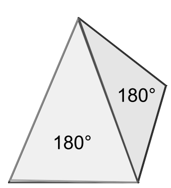
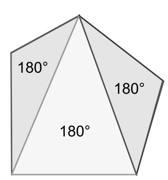
5.

Figurenbeispiele **Unregelmäßige Vierecke:**		
Summe aller Winkel	360°	720°

Begründung:

Die Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$ ergibt sich nach dem Einzeichnen von Diagonalen, die das Vieleck in (n – 2) Dreiecke von je 180° Winkelsumme zerlegen.

Beispiellösung:

Figur		
Innenwinkelsumme	360°= 2 • 180° = (4 – 2) • 180°	540° = 3 • 180° = (5 – 2) • 180°