

Offene Aufgaben auf drei Niveaus – in Freiarbeit wiederholen, üben und vertiefen

Reinhard Sinterhauf, Köditz

Illustriert von Liliane Oser, Hamburg

III/B



Foto: iStock/Thinkstock

Die größte Buddha-Statue der Welt steht in der Mitte Thailands. Doch wie groß ist sie wirklich?

Klasse: 9/10

Dauer: 6–8 Stunden (am besten Doppelstunden)

Inhalt: Mathematisierbare Probleme aus dem Alltag lösen; Bildern Informationen entnehmen; Grundrechenarten; Dreisatz; Berechnung von Winkeln; Berechnung des Volumens von Körpern; Umgang mit Längen, Strecken, Gewichten sowie Dichten

Ihr Plus:

- ✓ Aufgaben im Karteikartenformat
- ✓ geeignet für die Freiarbeit und für Vertretungsstunden

Experimentieren, Probieren und Schätzen – bei offenen Aufgaben gibt es mehr als eine plausible Lösung oder es sind zu wenige Informationen vorgegeben, sodass die Schüler schätzen müssen. Hintergrund sind häufig Alltagsprobleme. Daher werden offene Aufgaben immer häufiger auch in Prüfungssituationen gestellt.

Didaktisch-methodische Hinweise

Was sind offene Aufgaben?

Für offene Aufgaben gibt es kein bestimmtes Lösungsschema. Nicht die Fähigkeit, eine bestimmte Formel anwenden zu können, ist hier Ziel Ihres Unterrichts. Stattdessen müssen die Lernenden in ihrem mathematischen „Werkzeugkasten“ nach der richtigen Vorgehensweise suchen. Der Ausgangspunkt offener Aufgaben ist in der Regel eine problemhaltige Alltagssituation. Ergebnisse werden nicht nur durch reines Rechnen, sondern auch durch sinnvolles Schätzen und sorgfältiges Überschlagen ermittelt.

Herkömmliche Mathematikaufgaben trainieren häufig das automatische Anwenden von Rechentechniken und Lösungsalgorithmen. Eine veränderte Aufgabenform mit mehr offenen Aufgabenstellungen folgt aus der Forderung der Kultusministerkonferenz nach mehr Alltagsbezug des Mathematikunterrichts und stärkt die Problemlösefähigkeit Ihrer Schüler.

Offene Aufgaben liegen in zwei voneinander verschiedenen Aufgabentypen vor:

- Aufgaben, bei denen es mehr als eine plausible Lösung gibt und bei denen mehr als ein Rechenweg möglich ist,
- Aufgaben, bei denen keine Werte vorgegeben sind und bei denen die Schüler folglich schätzen müssen.

Die verschiedenen Herangehensweisen an Schätzaufgaben

Eine offene Aufgabe kann in der Regel auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Sie hat selten eine allgemeingültige Lösung. Daher ergibt sich die Notwendigkeit von Begründungen. Zudem müssen die Bearbeitung der Aufgabe und die Lösung dokumentiert und für andere verständlich präsentiert werden. Auf diese Weise werden die Problemlösefähigkeit und die Kompetenz des Präsentierens gezielt gefördert. Ihren Schülern stehen dabei drei unterschiedliche Herangehensweisen zur Verfügung:

Anzahlen schätzen – die Raster-Methode (M 3, M 4)

Bei dieser Aufgabe werden die Lernenden aufgefordert, eine Anzahl in einem Bild zu schätzen, ohne alle Elemente einzeln abzuzählen. Dazu ist es hilfreich, das Bild in Abschnitte zu teilen und nur die Anzahl der Elemente in einem Abschnitt zu zählen oder zu schätzen. Durch Multiplikation mit der Anzahl der Abschnitte kann so auf die Anzahl an Elementen im gesamten Bild geschlossen werden.

Größen schätzen – Gewichte, Strecken, Volumen und Winkel (M 5, M 6)

Hier arbeiten die Schüler mit einem Foto, einer Landkarte oder anderen realen Gegenständen, deren Gewicht, Länge, Volumen usw. geschätzt werden soll. Dazu werden etwa Strecken oder Körper direkt in das Bild eingezeichnet und das eigene Alltagswissen zum Vergleichen genutzt. Diese Aufgaben können handlungsorientiert gelöst werden.

Das Unbekannte erforschen – Fermi-Aufgabe (M 7, M 8)

Es handelt sich um Aufgaben, bei denen keine Werte oder Bilder zum direkten Abschätzen vorgegeben sind. Für die Lernenden besteht die Herausforderung darin, dass sie weder direkte Erfahrungswerte aus einem ähnlichen Problem haben noch die nötigen Daten zur Verfügung stehen, mit denen sie eine Berechnung direkt anstellen könnten. Andererseits kennen sie die Zusammenhänge im Umfeld des Problems und nutzen diese zur Lösung der Aufgabe.

Reihe 15 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Die Herangehensweise an offene Aufgaben wiederholen

Material	Thema	Stunde
M 1	So geht's! – Mit offenen Aufgaben umgehen Eine methodische Anleitung schreiben, wie man offene Aufgaben lösen kann	1.

Offene Aufgaben – ein Karteikasten für Freiarbeit und Vertretungsstunden

Material	Thema	Stunde
M 2	Allgemeine Tippkarten zu offenen Aufgaben Eine schrittweise Anleitung (Lösung zu M 1) Die Raster-Methode zum Schätzen von Anzahlen Größen schätzen – Anleitung Fermi-Aufgaben – Anleitung	2.

Anzahlen schätzen

Material	Thema	Stunde
M 3	Offene Aufgaben: Anzahlen schätzen (★–★★★) Niveau 1: Die Anzahl der Liegen am Strand schätzen Niveau 2: Die Anzahl der Menschen im Fußballstadion schätzen Niveau 3: Die Anzahl der Blüten auf einer Blumenwiese schätzen	3./4.
M 4	Tipps zu: Anzahlen schätzen Konkrete Tipps zur Schätzung von Anzahlen	

Größen schätzen

Material	Thema	Stunde
M 5	Offene Aufgaben: Größen schätzen (★–★★★) Niveau 1: Die Größe einer Buddha-Statue (in Thailand) schätzen Niveau 2: Die Dauer einer Fahrradtour durch Neuseeland schätzen Niveau 3: Den Winkel an der Spitze der Maya-Pyramide „El Castillo“ abschätzen	5./6.
M 6	Tipps zu: Größen schätzen Konkrete Tipps zur Schätzung von Größen	

Reihe 15 S 5	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Fermi-Aufgaben

Material	Thema	Stunde
M 7	Offene Aufgaben: Fermi-Aufgaben (★(★) und ★★(★)) Wie viel Geld verbraucht ein Raucher? Wie lang ist der gesamte Inhalt einer Zahnpasta-Tube?	7./8.
M 8	Tipps zu: Fermi-Aufgaben Konkrete Tipps zur Bearbeitung von Fermi-Aufgaben	

III/B

Bastelvorlage und Zusatzmaterial auf CD-ROM 71

Material	Thema
M 9	Bastelvorlage für den Tipp-Schieber Eine Hülle für die Tippkarten, den Tipp-Schieber, basteln



Material	Thema
M 10, M 11	Vermischte offene Aufgaben, Hinweise, Tippkarten und Beispiellösung

Minimalplan

Sie haben für eine ausführliche Behandlung des Themas keine Zeit?

Dann nutzen Sie zur Einführung oder Wiederholung offener Aufgaben **M 1** und **M 2**. Oder verwenden Sie die **Materialien mit den Tippkarten einzeln**, um immer wieder offene Aufgabenstellungen im Unterricht zu bearbeiten. Durch die verschiedenen Themengebiete können die Materialien flexibel in Ihren Unterricht einfließen und auch als einfaches Arbeitsblatt ausgeteilt werden.

M 1 So geht's! – Mit offenen Aufgaben umgehen

Für manche Aufgaben gibt es keine Formel, die du in deiner Formelsammlung nachschlagen kannst. Aufgaben, bei denen nicht alle notwendigen Werte vorgegeben und unterschiedliche Lösungswege möglich sind, nennt man **offene Aufgaben**.

Mein Beispiel:

Stell dir vor, du willst den ganzen Boden des Klassenzimmers mit Basketballen auslegen.

Wie viele Bälle brauchst du?



Aufgaben

- Überlegt euch eine Anleitung für offene Aufgaben. Beachtet den Text oben im Kasten. Teilt eure Anleitung in fünf Schritte ein und beschreibt kurz, was ihr in jedem Schritt zu tun habt.
- Löst die Beispiel-Aufgabe in der Sprechblase mithilfe eurer Anleitung für offene Aufgaben. Falls ihr etwas in der Anleitung vergessen habt, korrigiert sie.



So könnten die Schlagwörter zu eurer Anleitung lauten. Schreibt zu jedem Schritt, was damit gemeint ist.

**Tipp –
Aufgabe 1**

Anleitung für offene Aufgaben

- | |
|--|
| 1. Schritt: Frage |
| 2. Schritt: Ergebnis schätzen |
| 3. Schritt: Zusätzliches Wissen |
| 4. Schritt: Rechnung |
| 5. Schritt: Antwort |

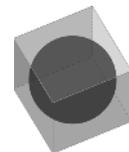
Zum 3. Schritt:

Wie groß ist euer Klassenraum?

Messt den Raum aus oder schätzt ihn ab!

Wie groß ist ein Basketball?

Messt die Länge und Breite des Basketballs, indem ihr ihn zwischen zwei Bücher klemmt. So könnt ihr die quadratische Bodenfläche messen, die ein Ball einnimmt.



Zum 4. Schritt: Wie oft passt der Ball in den Raum?

Nähert den Ball mit einem Würfel an. Wie oft passt dessen Grundfläche auf den Boden des Klassenzimmers?

M 2 Allgemeine Tippkarten zu offenen Aufgaben – Fortsetzung

III/B

Offene Aufgabe: Größen schätzen

Die Aufgabe

In dieser Aufgabe arbeitest du mit einem Foto oder anderen Gegenständen. Dabei werden Fragen nach Strecken, Volumen oder Gewichten gestellt. Zum Messen brauchst du oft ein Lineal oder Maßband. Nutze auch dein eigenes Wissen oder schätze Größen ab.

Beispiel: Wie hoch ist die Ramses-II.-Statue vor dem Tempel von Abu Simbel in Ägypten?

So gehst du vor

1. Suche Größen auf dem Bild, die du kennst oder schätzen kannst.
2. Zeichne passende Hilfslinien ein, die du gut messen kannst.
3. Schätze deine Vergleichsgrößen! Die folgende Tabelle kann dir helfen.

Auto	Baum	Maßstab
3,00 m bis 5,00 m	7 m bis 40 m	1 cm $\hat{=}$ 500 km
Mensch (stehend)	Tür	Hand
1,60 m bis 2,00 m	2,20 m bis 5,00 m	etwa 20 cm



Foto: iStockphotos/Thinkstock

4. Nutze: Dreisatz, Satz von Pythagoras, Verhältnisse, Volumenformeln.

Tipp – Sieh auch in deiner Formelsammlung nach!

5. Beantworte die Frage und vergleiche mit deinem Schätzwert. Kann dein Ergebnis stimmen?

Offene Aufgaben: Fermi-Aufgabe

Die Aufgabe

Bei dieser Aufgabe hast du kein Bild, das dir hilft. Du darfst hier alle Größen schätzen und Vermutungen anstellen. Diese Vermutungen machen das Berechnen der Aufgabe einfacher. Entwirf eventuell eine Skizze und dokumentiere deine Annahmen genau.

Beispiel

Wie viele Autos stehen in einem 15 km langen Stau?

So gehst du vor

1. Stell sicher, dass du die Aufgabe verstanden hast. Frage sonst bei deiner Lehrerin oder deinem Lehrer nach!
2. Stelle Vermutungen und Bedingungen auf. Hier z. B.: Die Fahrbahn hat 2 Spuren. Nur auf einer Spur sind Lkws erlaubt. Die rechte Spur ist zur Hälfte mit Autos und zur Hälfte mit Lkws besetzt. Ein Auto ist im Durchschnitt 4 m lang. Ein Lkw misst dagegen etwa 15 m Länge ...
3. Lasse Vermutungen weg, die eine Rechnung unübersichtlich machen.
4. Nutze den Dreisatz, Verhältnisse, Volumenformeln und achte auf die Einheiten. Berechne das Ergebnis.
5. Beantworte die Frage und vergleiche mit deinem Schätzwert. Kann dein Ergebnis stimmen?



Foto: iStockphotos/Thinkstock

Reihe 15	Verlauf	Material S 4	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 3 Offene Aufgaben: Anzahlen schätzen ★



Foto: Colibri/box

Hier siehst du die Sankt-Paulus-Bucht in Lindos. Dies ist eine Stadt auf der griechischen Insel Rhodos.



Foto: JOKER/picture alliance

In diesem Stadion, dem Maracanã-Stadion in Brasilien, hat Deutschland 2014 die Weltmeisterschaft gegen Argentinien gewonnen. Dazu wurde die Arena umgebaut und für Zuschauer überdacht.

III/B

Voransicht

Reihe 15	Verlauf	Material S 7	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 3 Offene Aufgaben: Anzahlen schätzen ★★★

III/B



Foto: iStock/Thinkstock

Eine unberührte Wildblumenwiese mit einigen Hundert Blüten. Ein toller Anblick!

Hier knicken! →

Eine Bergwiese entdecken ★★★

Hendrik hatte die Karte falsch gelesen und jetzt sitzen er, Manuel und Louisa auf einem Vorsprung und versuchen, sich zu orientieren. Und das passierte nach 3 Stunden Wandern!



Foto: Colourbox

Manuel, Louisa und Hendrik versuchen, sich auf der Karte zu orientieren.

Hendrik: Na, immerhin ist die Aussicht super!

Manuel: Ja, echt ein klasse Rastplatz!

Louisa: Wie viele Blüten wohl hier auf der Wiese zu sehen sind?

Hendrik: Hm, ich schätze, dass es mindestens 2000 sind.

Aufgabe

Beantworte Louisas Frage und überprüfe so, ob Hendrik richtig geschätzt hat.

M 4

Tipps zu: Anzahlen schätzen

Ab in den Urlaub!	Eine Weltmeisterschaft erleben	Eine Bergwiese entdecken
Dies ist eine Aufgabe zur Raster-Methode . Lies dir die Tippkarte dazu durch!	Dies ist eine Aufgabe zur Raster-Methode . Lies dir die Tippkarte dazu durch!	Dies ist eine Aufgabe zur Raster-Methode . Lies dir die Tippkarte dazu durch!
Annahme: Unter jedem Schirm stehen zwei Liegen.	Annahme: Dort, wo die Sitze eng aneinanderstehen, stehen immer gleich viele Stühle pro Fläche.	Annahme: Durch die Perspektive sind im Bild hinten mehr Blüten als vorn.
Tipp Schätze erst die Anzahl der Schirme und berechne danach die Anzahl der Liegen.	Tipp Oben rechts siehst du das ganze Stadion. Das Foto der Tribüne zeigt nur etwa ein Fünftel!	Tipp Das Raster muss nicht nur eine Größe haben oder viereckig sein. Sei kreativ!
Teile das Bild so ein: 	Teile das Bild so ein: 	Teile das Bild zum Beispiel so ein: 
Foto: Colourbox	Foto: JOKER/picture alliance	Foto: iStock/Thinkstock

Reihe 15	Verlauf	Material S 11	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	------------------	-----	---------	----------

M 5 Offene Aufgaben: Größen schätzen

III/B



Auf der mexikanischen Halbinsel Yucatan steht die große Tempelruine Chichén Itzá. Ein Gebäude davon ist „El Castillo“ das Schloss. Foto: Colourbox

Hier knicken! →

Die Tempelruine Chichén Itzá ★★★

Das Gebäude „El Castillo“ steht in der Tempelruine und stammt aus der späten Maya-Zeit etwa 870 n. Chr. Dabei dient die Pyramide als Fuß für den eigentlichen Tempel.



Die Pyramiden von Gizeh in Ägypten

Yagmur: Was ist das? Eine Pyramide ohne Spitze? Ich kenne nur die Pyramiden in Ägypten.

Heiko: Ja, das waren meistens Grabstätten von Pharaonen. Das Foto zeigt ein Gebäude des Maya-Tempels „El Castillo“.

Yagmur: Hm ..., mir gefallen die spitzen Pyramiden besser!

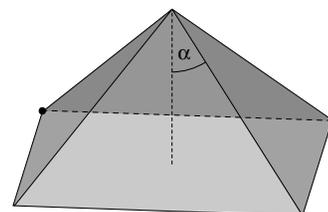
Heiko: Was meinst du, welchen Winkel hätte die Spitze der Maya-Pyramide gehabt?

Yagmur: Auf jeden Fall weniger als 45° !

Aufgabe

Prüfe Yagmurs Aussage.
Welchen Winkel hätte die Spitze der Maya-Tempelruine gehabt?

(Die beiden meinen den Winkel α in der Skizze rechts.
Die Grundfläche der Pyramide ist quadratisch.)



Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

Alle Lösungen sind Beispiele. Bei offenen Aufgaben kann immer auch ein anderer Lösungsweg richtig sein. Falls deine Lösung nicht abgedruckt ist, frage deine Lehrkraft.

M 1 So geht's! – Mit offenen Aufgaben umgehen

Mit dem Material **M 1** führen Sie eine grundsätzliche Strategie zur Bearbeitung offener Aufgaben ein. Dies ist besonders wichtig für Schüler, die beim Lösen von offenen Aufgaben **systematische** Probleme haben. Teilen Sie die Klasse dazu in Dreier- bis Vierergruppen ein. In **Aufgabe 1** erstellen die Lernenden eine **Anleitung für die Bearbeitung offener Aufgaben**, indem sie entweder selbstständig oder mithilfe der Tippkarte den Lösungsweg einer offenen Aufgabe in fünf Schritte einteilen. Die **Aufgabe 2** ist eine offene Aufgabe, bei der die Schüler ihre Anleitung zum Lösen nutzen und diese – wenn nötig – korrigieren. Die fertige Anleitung dient dann in den Folgestunden als Unterstützung beim Bearbeiten komplexerer Aufgaben.

Tipp Motivieren Sie mindestens eine Gruppe, die genaue Größe eines Basketballs mithilfe von Büchern zu bestimmen und den Klassenraum mit Maßband oder Zollstock auszumessen. So können Sie in der Plenumsphase die geschätzten Maße evaluieren.

Zur Vorbereitung

Für **leistungsstarke Schüler** trennen Sie den unteren Teil mit den Tipps vor dem Kopieren ab. Für **leistungsschwache Lernende** kopieren Sie Material **M 1** mit den Tipps. Sie können den Tipp zu Aufgabe 1 entweder als Hilfestellung mit austeilen oder zusammen mit den Tipps zu Aufgabe 2 auf das Lehrerpult legen. Ein Gruppenmitglied holt dann für alle eine Tippkarte ab, wenn die Gruppe nicht mehr weiterweiß.

Zum Abschluss der Unterrichtsstunde

Führen Sie im Anschluss an die Bearbeitung von Material **M 1** eine kurze **Reflexionsphase** durch, bei der die Schüler berichten, wie sie mit der Aufgabenstellung zurechtgekommen sind.

Mögliche Fragestellungen könnten sein:

- Wie fandest du diese Art von Aufgabenstellung?
- Was ist anders als bei üblichen Mathematikaufgaben?
- Was hast du heute gelernt?

Zusatzmaterial

- einen oder mehrere Basketbälle
- Maßband oder Zollstock
- (Schul-)Bücher

Zur Besprechung offener Aufgaben allgemein

Generell bietet es sich nach der Bearbeitung offener Aufgabenstellungen an, die Ergebnisse an der Tafel zu sammeln. Dabei kann eine gewisse Bandbreite an Lösungsmöglichkeiten deutlich werden, die von den getroffenen Annahmen beziehungsweise den gemessenen Daten abhängt. Diese Bandbreite kann Ausgangspunkt für Diskussionen mit den Schülern über die Angemessenheit beziehungsweise Plausibilität der einzelnen Ergebnisse sein. **Bei offenen Aufgabenstellungen ist der Weg das Ziel.** Akzeptieren Sie großzügig auch Lösungen, die nicht in allen Belangen plausibel sind.