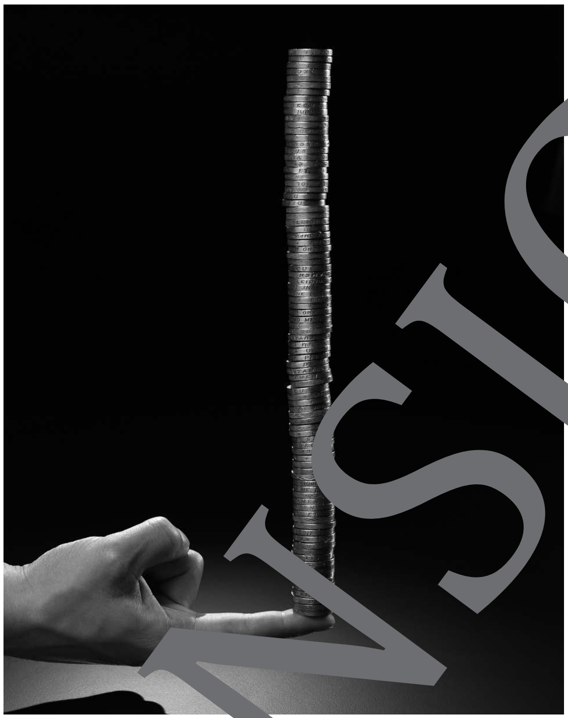
Zählen und Darstellen

Florian Borges, Traunstein



© DigitalVision/Thinkstock

Wie viele Münzen hat der Künstler übereinandergestapelt?

Klasse: 5/6

Dauer: 8 Stunden

Inhalt: Grundlagen des Dezimalsystems, ggf. Dualsystem als weiteres Stellenwertsystem von Relevanz in [illegible] IT; Römische Zahlen; Darstellung am Zahlenstrahl und Ordnungsrelation; Längen- und Flächenmessung; Grundlagen der Kombinatorik [illegible]n; Säulen- und Kreisdiagramm; Baumdiagramm als Darstellung aller möglichen Ergebnisse sowie zur Veranschaulichung des Zählprinzip[illegible]

Ihr Plus:

- ✓ Spielerische Herleitung der Formel für Flächeninhalt und Umfang des Rechtecks
- ✓ Einsatz eines Kalkulationsprogramms (z. B. Microsoft Excel) bei der Darstellung von Säulen- und Kreisdiagramm sowie von Strichlisten
- ✓ Lernerfolgskontrolle

Zählen ist gar nicht so einfach! Beim Zählen ist System gefragt. Ihre Schüler lernen das Stellenwertsystem und die Zahlengerade kennen. Sie stellen Daten in Diagrammen dar und [illegible] Grundlagen der Kombinatorik (Zählprinzip, Fakultäten).

Didaktisch-methodische Hinweise

Beginnen Sie in Kleingruppen mit den Grundlagen unseres **dezimalen Stellenwertsystems** einschließlich **sehr großer Zahlen** (**M 1**). Optional behandeln Sie auch die **römischen Zahlen (M 1 A)** sowie das **Dualsystem (M 1 B)**. Fahren Sie fort mit der **Darstellung am Zahlenstrahl** (**M 2**). Mit dem folgenden Übungsblatt (**M 2 A**) vertiefen Sie die Kenntnisse dieser Darstellungsform. Zusätzlich wiederholen Ihre Schüler die Grundrechenarten und interpretieren die Relationen „>“ und „<“ grafisch. Zählen kann durch eine bestimmte **Anordnung** der zu zählenden Objekte erleichtert werden – etwa bei rechteckiger Anordnung (Rechtecksfläche in **M 3**, das räumliche Pendant dazu im Abschlusstest **M 8**). So leiten Sie gemeinsam mit Ihren Schülern die **Flächen- und Umfangsformeln** für das Rechteck her.

Verschiedene **Darstellungsformen für (An-)Zahlen** folgen in **M 4**. Hier ist der Einsatz eines Computers sinnvoll, um mit der **kostenlosen Software CrypTool** die **Caesar-Verschlüsselungstechnik** vorzuführen. Das Programm zählt blitzschnell die Buchstaben eines Textes und stellt die Verteilung als Säulendiagramm dar – die Kinder erkennen an den höchsten Säulen sofort die Codebuchstaben der häufigsten deutschen Buchstaben „e“ und „n“ sowie damit den verwendeten Schlüssel. Die Technik dürfte vielen Kindern bekannt sein, aber erst im Unterricht werden Ihre Schüler erkennen, dass die Technik unsicher ist. Mit dem Baumdiagramm als Darstellung mehrstufiger Alternativ-Entscheidungsmöglichkeiten greifen Sie das **Zählprinzip** wieder auf (**M 5**). Eine weitere Vertiefung folgt mit den **Fakultäten** (**M 6**). Die Lernerfolgskontrolle (**M 8**) sollte in Gruppen bearbeitet und das Ergebnis aufgabenweise von je einem Gruppenmitglied im Plenum vorgestellt werden.

Vorkenntnisse

Die Schüler können Zahlen bis einschließlich 1 000 000 (= 1 Million) sicher lesen, beherrschen die Grundrechenarten in diesem Zahlenraum grundsätzlich (d. h. nicht notwendig Quotienten mit großen, „hässlichen“ Divisoren) und die Grundlagen der Potenzrechnung. Außerdem sind ihnen auch andere Zahlendarstellungen als die üblichen (z. B. Würfelzahlen) bekannt – eine ideale Einstiegsmöglichkeit. Des Weiteren kennen Ihre Schüler die Begriffe „Quadrat“, „Rechteck“, „Winkel“ und „Grad“.

Vorbereitung und Ablauf der Arbeit an der Lerntheke

Sie kopieren die Materialien **M 1–M 6** und **M 8** in Klassenstärke und laminieren jeweils ein Exemplar, das Sie mit den Kopien auf dem Fensterbrett auslegen. Die Schüler werden von Ihnen in Arbeitsgruppen eingeteilt, holen sich die Materialien und fertigen in der Gruppe für **M 1–M 6** und **M 8** jeweils eine Folie mit den Aufgabenlösungen an, die dann in der Folgestunde von einem Gruppenmitglied im Plenum vorgestellt und bei Bedarf gemeinsam „verbessert“ werden. Die **Tippkarten** (**M 1** und **M 7**) laminieren Sie und legen sie am Lehrerpult aus.

Ziele

Ihre Schüler

- können sich gut am Zahlenstrahl orientieren und entwickeln eine Sicherheit im Umgang mit der Ordnungsrelation (vorbereitend für negative Zahlen und Brüche),
- beherrschen das Zählprinzip und die Verwendung der Fakultäten beim systematischen Zählen,
- entwickeln einen sicheren Umgang mit Säulen- und Kreisdiagrammen als verbreitete Darstellungsform von Zahlenmaterial,
- trennen klar zwischen Umfang und Fläche eines Rechtecks.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 5	L 1	... erkennen die Vorteile der Schreibweise von Zahlen im Dezimalsystem gegenüber römischen Zahlen (**M 1**), ... lernen als Stellenwert-Alternative das Dualsystem kennen (**M 1 B**),	II
K 1, K 5	L 1, L2	... verstehen die Symbole < und > auch am Zahlenstrahl (**M 2**),	I, II
K 3, K 5	L1, L 2	... leiten Umfangs- und Flächenformeln für das Rechteck aus vorteilhafter Zähltechnik ab (**M 3**),	I–III
K 1, K 2, K 3, K5	L 1	... stellen Zahlen wirkungsvoll grafisch als Säulen- oder Kreisdiagramm dar (**M 4**),	II
K 1, K 6	L 5	... erkennen die Unsicherheit der Caesar-Verschlüsselung (**M 4**),	II, III
K 3, K 5	L 1	... zählen systematisch, beherrschen das Zählprinzip und arbeiten mit Fakultäten (**M 5**, **M 6**).	II, III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

Mediathek

Die kostenlose Software zum Verschlüsseln CrypTool

http://www.cryptool-online.org/

Auf einen Blick

Einstieg: Sammeln Sie die Vorkenntnisse der Kinder: Wer kennt besondere Zahlendarstellungen (röm. Zahlen o. Ä.)?

Die Grundlagen des Zählens (Stellenwertsystem und Zahldarstellungen)

Material	Thema	Stunde
M 1	**Wie wir zählen – das Stellenwertsystem** Dezimalsystem als Stellenwertsystem; große Zahlen und deren Aufbau; römische Zahlen, insbesondere Vergleich des Dezimalsystems mit den römische Zahlen	1./2.
	Tippkarte zu den römischen Zahlen	
	Der Computer hat keine zehn Finger! Dualsystem als Stellenwertsystem; Umrechnung vom Dualsystem in das Dezimalsystem und umgekehrt	
M 2	**Darstellung am Zahlenstrahl** Zahlenstrahl; Einheit; Ordnung der natürlichen Zahlen	3.
	Übungen am Zahlenstrahl – LEK Addition und Subtraktion am Zahlenstrahl; auch Multiplikation als „große Schritte“	
M 3	**Geschickte Zählverfahren in [illegible]** Formel zu Rechtecksfläche und Rechtecksumfang	4.
M 4 (evtl. mit PC)	**Darstellung in Diagrammen** Strichliste, Säulen-, Balken- und Kreisdiagramm; Buchstabenhäufigkeit in deutschen Texten; Caesar-Verschlüsselung	5.

Kombinatorik

Material	Thema	Stunde
M 5	**Speisekarten als Baumdiagramme – Kombinatorik I** Zählprinzip, veranschaulicht am Baumdiagramm	6.
M 6	**Zeitvertreib im Wartezimmer – Kombinatorik II** Fakultäten	7.

Tippkarten zur Binnendifferenzierung und Lernerfolgskonstrolle

Material	Thema	Stunde
M 7	**Tippkarten**	
M 8 (LEK)	**Bist du fit? – Teste dein Wissen!** 10 Aufgaben zu allen Themen	8.

Minimalplan

Beschränken Sie sich auf die Materialien **M 1–M 4.**

M 1 Wie wir zählen – das Stellenwertsystem

Bereits Kleinkinder entwickeln eine Vorstellung von **zählbaren Mengen**. Meist geht es dabei um Gummibärchen o. Ä., von denen ihre Geschwistern unter keinen Umständen mehr haben dürfen. Hilfsmittel sind dabei gerne die 10 Finger.

Auch später beim Erlernen der **Grundrechenarten** werden die Finger oft verwendet. Man vermutet, dass sich deshalb unser **Zehner- (oder Dezimal)system** durchgesetzt hat.

Doch wie funktioniert das eigentlich genau?

© iStock/Thinkstock

Die Za

Aufgabe: Lies die folgende Zahl und beobachte dich dabei ganz genau:

3527

Was tust du zuerst? Genau, du zählst erst mal die Ziffern.

Wenn also diese Zahl 4 Ziffern besitzt, dann zählt die linke Ziffer 3 die Tausender. Man liest sofort „*drei**tausend***fünfhundertsiebenundzwanzig“. Würde die rechte Ziffer 7 fehlen, hätte die 3 links eine ganz andere Bedeutung: 352 steht für *drei**hundert***zweiundfünfzig – die gleiche Ziffer 3 zählt hier die Hunderter.

Merke: Unser **Zahlensystem** ist ein **Stellenwertsystem** mit zehn (arabischen) Ziffern:

1, 2, 3, 4, ..., 8, 9 und 0.

Mehr benötigen wir nicht, um alle (auch beliebig große) Zahlen zu schreiben.

Die rechte Stelle ist immer die Einerstelle (E), nach links wird dann immer weiter (nach Bedarf) in **Zehnerbündel** gepackt (1Z = 10 E, 1H = 10 Z, 1 T = 10 H usw., wobei Z = Zehner, H = Hunderter, T = Tausender).

3527 bedeutet also im Dezimalsystem:

$$3\cdot 1000+5\cdot 100+2\cdot 10+7\cdot 1=3\cdot 10^3+5\cdot 10^2+2\cdot 10^1+7\cdot 10^0.$$

Die Stellenwerte (oder Stufenzahlen) $1, 10, 100, 1000, \ldots$ sind Potenzen von 10.

Große Zahlen erhalten jeweils in Tausenderpaketen neue Namen (gern lässt man einen kleinen Zwischenraum oder fügt Punkte zur besseren Lesbarkeit ein):

1000 Tausender = 1 Million;

1000 Millionen = 1 Milliarde;

1000 Milliarden = 1 Billion;

1000 Billionen = 1 Billiarde usw., die ***Potenzschreibweise*** spart viel Schreibarbeit:

$$1\,000\,000 = 10^6 = \underbrace{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}_{\text{6 mal Faktor 10}} = 1 \text{ Million}$$

$1\,000\,000\,000 = 10^9$ = 1 Milliarde

$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ = 1 Billion usw. (vgl. Aufgabe 2)

Aufgaben

1. a) Ist das System der römischen Zahlen auch ein Stellenwertsystem?

b) Übersetze 1962 ins römische Zahlensystem sowie MMCDXLIV ins Dezimalsystem.

c) Welche Schwierigkeit hätte ein römischer Millionär, der sein Vermögen dem Finanzamt melden muss? Welchen entscheidenden Vorteil hat unser Dezimalsystem gegenüber dem römischen?

Tipp Ein Stellenwertsystem (Positionssystem) ist ein System zur Darstellung von Zahlen durch Ziffern, bei denen der Wert der Ziffern von der Stelle abhängt, an welcher sie innerhalb der Zahl geschrieben ist.

Tipps zu den **römischen Zahlen** gibt dir deine Lehrerin [illegible] Lehrer (**M 1 A**).

2. Die Namen der jeweils um den Faktor 1000 größer werdenden Zahlen lauten in dieser Reihenfolge (zunächst) Million, Milliarde, Billion, Billiarde, Trillion, Trilliarde, Quadrillion, Quadrilliarde, Quintillion, Quintilliarde, Sextillion, Sextilliarde, Septillion, Septilliarde, Oktillion, Oktilliarde, Nonillion, Nonilliarde, Dezillion, Dezilliarde usw.

   Schreibe eine Oktillion in Potenzschreibweise und lies 1 234 [illegible] 890 123 456 789.

3. Überlege, ob es sich bei dem jeweiligen Bild unten um eine Geste (falls ja, welche?) oder um eine Anzahl handelt.

Zahldarstellungen oder nicht?

© iStock/Thinkstock

© Fuse/Thinkstock; Mit Model Release

© Photodisk/Thinkstock

© Ingram Publishing/Thinkstock; Mit Model Release

M 1 A Tippkarte zu den römischen Zahlen

Tipp **Römische Zahlzeichen**

Im Römischen Reich dienten Zahlzeichen zum Schreiben von Zahlen. Bis ins 12. [illegible]hundert wurden sie in Mitteleuropa noch allgemein verwendet.

Folgende Zahlzeichen gibt es:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Schreibt man römische Zahlzeichen hintereinander, so bedeutet dies, dass ihre Werte zu addieren sind.

Dabei musst du aber folgende Regeln, die sich zum Teil erst im späten Mittelalter gebildet haben, beachten:

I) Ein Zeichen wird höchstens dreimal hintereinandergesetzt. Statt vier Zeichen schreibt man das nächstgrößere Zeichen und setzt [illegible] kleinere Zeichen einmal davor.

II) Die Zeichen V, L und D treten nie zweimal auf, da man dann einfach X, C und M schreiben kann.

III) Vor einem Zeichen stehen nie zwei kleinere, sondern höchstens ein kleineres Zeichen. Man schreibt z. B. nicht IIX, [illegible] (= 8).

IV) Vor einem Zeichen steht höchstens das nächstkleinere der Zeichen I, X und C, nie ein noch kleineres. Für die Zahl 99 schreibt man also nicht IC, sondern XCIX.

Für den heutigen Gebrauch römischer Zahlzeichen besitzt die Regel IV) nur noch eingeschränkte Gültigkeit. Von zwei möglichen Schreibweisen wählt man heute nämlich meist die kürzere, etwa IL [illegible], nicht XLIX).

Beispiele:

1 = I	29 = XXIX
2 = II	49 = XLIX oder IL
3 = III	29 = XXIX
4 = IV	49 = XLIX oder IL
5 = V	441 = CDXLI
6 = VI	627 = DCXXVII
7 = VII	999 = CMXCIX oder IM
8 = [illegible]	1042 = MXLII
[illegible] = IX	1206 = MCCVI
10 = X	1984 = MCMLXXXIV
11 = XI	2004 = MMIV
20 = [illegible]	3789 = MMMDCCLXXXIX

Quelle: *Rechnen und Mathematik – Das Lexikon für Schule und Praxis,* Dudenverlag, 6. überarbeitete Auflage, Mannheim 2000, S. 545 f.

M 1 B Der Computer hat keine zehn Finger!

Vermutlich hat sich bei uns Menschen das Dezimalsystem mit seinen Zehnerbündeln sowie den zehn verschiedenen Ziffern 0 bis 9 durchgesetzt, weil wir eben gerade zehn Finger haben. Der **Computer** aber kennt nur die zwei Zustände „**Strom fließt**“ („**1**“) oder „**Strom fließt nicht** („**0**“). Das sind die beiden Ziffern, mit denen der Computer arbeiten kann. Alle Umwandlungen von unserem System aus Zahlen und Zeichen laufen beim PC im Hintergrund ab, und wir bemerken nichts davon.

Aufgabe: Bestimme die Anzahl Gummibärchen auf dem Bild im Dualsystem.

© iStock/Thinkstock

Fünf bunte Gummibärchen

Es liegen fünf Gummibärchen auf dem Tisch. Du sollst die Anzahl bestimmen, hast dabei nur die Ziffern 0 und 1 zur Verfügung und bündelst nicht wie gewohnt zehnerweise, sondern packst **Zweierbündel**.

So geht's

Das erste Bärchen zählen wir locker mit „$\mathbf{1_2}$“. Der Index 2 weist darauf hin, dass wir hier nicht unsere normalen Zahlen im Dezimalsystem verwenden, sondern das **Zweiersystem**.

Beim zweiten Bärchen gehen uns schon die Ziffern aus. Wir packen daraus ein Zweierbündel, dann bleiben 0 einzelne übrig, und man schreibt „$\mathbf{10_2}$“. Das dritte Bärchen kommt wieder an der Einerstelle [illegible] schon „$\mathbf{11_2}$“, d. h., wir haben ein Zweierbündel und ein einzelnes. Beim vierten gehen wieder die Ziffern aus. Vier Bärchen sind aber zwei Zweierbündel, also ein Zweierbündel von Zweierbündeln (und wie bei unseren Zahlen von Einern über Zehner zu Hundertern usw.). Dafür schreibt man „$\mathbf{100_2}$“, d. h., wir haben ein Zweierbündel von Zweierbündeln und null einzelne. Mit dem letzten Bärchen geht es wieder ohne Bün[illegible] weiter, und wir erhalten 5 = „$\mathbf{101_2}$“, lies **„eins null eins im Zweiersystem**“.

Merke:

Das Zweiersystem ist auch ein Stellenwertsystem, die Stellenwerte sind nicht 1, 10, 100, 1000 usw., sondern (aus unserem System gesehen) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 ...

Beispiel: Um die Anzahl von 3527 Gummibärchen im Zweiersystem anzugeben, suchen wir zunächst die höchste Zweierpotenz, die in 3527 enthalten ist: Das ist 2048 = 2^{11}. Es bleiben 3527 − 2048 = 1479 Gummibärchen. Darin stecken wiederum 1024 = 2^{10}, und es bleiben 455 usw. Insgesamt erhalten wir also:

$$3527 = 1\cdot 2048 + 1\cdot 1024 + 0\cdot 512 + 1\cdot 256 + 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 0\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1$$

$$= 110111000111_2$$

Der Vorteil des Zweiersystems ist der, dass jeder Stellenwert nur einmal oder keinmal in einer Zahl stecken kann, deswegen kommt man mit den Ziffern 0 und 1 aus. Allerdings werden die Zahlen schnell sehr lang.

Umgekehrt geht es entsprechend:

$$110101_2 = 1\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 32 + 16 + 4 + 1 = 53;$$

Aufgaben

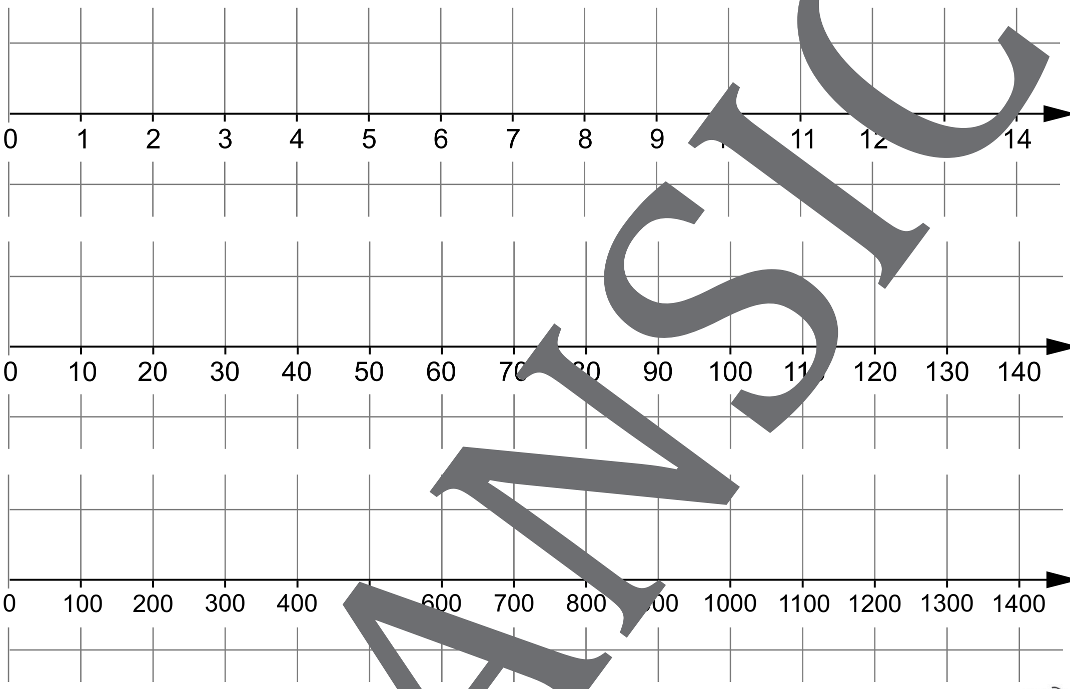
1. Rechne folgende Zahlen ins Dualsystem um: 31, 17 und 2016.
2. Rechne folgende Dualzahlen ins Dezimalsystem um: 10011011_2 und 111001_2.

M 2 Darstellung am Zahlenstrahl

Einen Meterstab oder ein Lineal kennst du bestimmt. Wir messen damit **Längen** bzw. **Abstände**. Um Zahlen darzustellen und zu vergleichen, kann man den **Zahlenstrahl** verwenden – genau wie ein Lineal. Er beginnt bei der Null, zeigt üblicherweise nach rechts und hat eine Einheit (das ist der Abstand zwischen 0 und 1). Rechts wird meist ein Pfeil angebracht, um zu zeigen:

Da geht es eigentlich noch weiter!

Hier drei Beispiele mit verschiedenen Einheiten (1, 10 bzw. 100).



Für **Zahlenvergleiche** gilt die Regel:

Regel

Von zwei Zahlen ist diejenige die größere (kleinere), die weiter rechts (links) auf dem Zahlenstrahl liegt.

Beispiele:

7 > 3; 130 > 20 oder (mit dem Zeichen „kleiner als“: 3 < 7; 20 < 130)

Ist nur ein Ausschnitt des Zahlenstrahls angegeben, muss es mit den vorhandenen Beschriftungen möglich sein, Ursprung (0) und Einheit sowie den Rest des Zahlenstrahls zu ergänzen. Es genügen zwei Werte.

Aufgaben

1. Auf einem Zahlenstrahl haben die Zahlen 11 und 37 den Abstand 52 cm.
   Welchen Abstand haben die Zahlen 2 und 3?
2. Die Zahl 23 liegt um 44 mm links von der Zahl 111.
   Welche Zahl liegt 6 cm rechts von der Zahl 23?

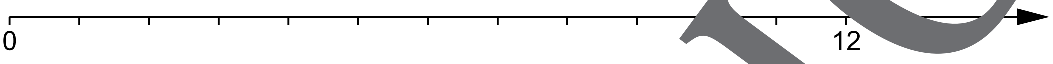
M 2 A Übungen am Zahlenstrahl – LEK

Aufgaben

Tipp

Die Einheiten in den folgenden Aufgaben sind jeweils unterschiedlich lang.

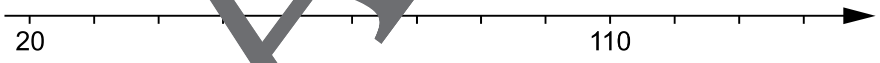
1. Wo liegt die Zahl 5?



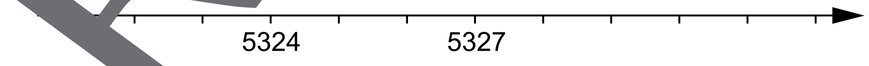
2. Hier fehlt der Anfang! Wo liegen die Zahlen 0 und 5?

3. Hier auch! Wo liegen die Zahlen 0 und 5 diesmal?

4. Wo liegen 0 und 55?



5. **Für Experten:** Wo liegen 5321 und 5330?



6. Beschreibe die Addition der Zahl 6 als „Spaziergang“ auf dem Zahlenstrahl.
7. Beschreibe die Subtraktion der Zahl 6 als „Spaziergang“ auf dem Zahlenstrahl.
8. Beschreibe die viermalige Addition der Zahl 3 als „Spaziergang“ auf dem Zahlenstrahl.
9. Beschreibe die dreimalige Addition der Zahl 4 als „Spaziergang“ auf dem Zahlenstrahl.
10. **Für Experten:** Beschreibe die dreimalige Addition der Zahl 4 sowie die anschließende fünfmalige Subtraktion der Zahl 2 als „Spaziergang“ auf dem Zahlenstrahl.

    Kürze diesen Weg möglichst ab.

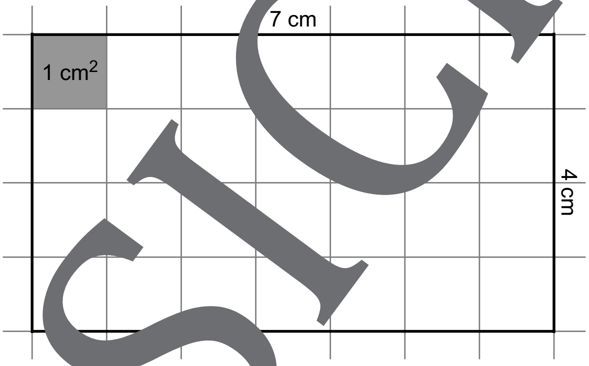
M 3 Geschickte Zählverfahren in Sonderfällen

Bei der Längenmessung verwendet man **Lineale**, **Meterstäbe** oder letztlich einen **Zahlenstrahl**. Denn man zählt nach, wie oft die Längeneinheit (z. B. 1 cm) in die zu messende Strecke passt.

Die Längenangabe 17 cm bedeutet also „17 mal 1 cm“.

Jede Größenangabe besteht so aus einem **Zahlenfaktor** und der **Einheit**. Das ist auch bei Zeiten, Gewichtsangaben oder Flächeninhalten so.

Bei Flächeninhalten ist zum Beispiel die Einheit 1 m² (also ein Quadrat mit 1 m Seitenlänge) oder 1 cm² (ein Quadrat mit 1 cm Seitenlänge). Bei Rechtecken lässt sich die Anzahl der zum Auslegen benötigten „**Quadratfliesen**“ viel leichter bestimmen als durch Zählen *aller* Quadrate. Man zählt in der Abbildung die Quadrate einer „Zeile“ (7 Stück) und einer „Spalte“ (4 Stück), benötigt zum Auslegen also 7 Reihen zu je 4 Stück oder 4 Reihen zu je 7 Stück, insgesamt



$4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$.

Ergebnis: Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 28 cm².

Dafür musste man nicht bis 28 zählen, sondern [illegible] 7 bzw. 4 – und multiplizieren.

Das ist die **Flächenformel** des Rechtecks: $\boxed{\text{Fläche = Länge mal Breite.}}$

Beispiel: Du kennst sie längst von den Schokoladentafeln:

Tafel Bitterschokolade

© iStock/Thinkstock

Niemand zählt hier mühsam bis 24. Man rechnet gleich $4 \cdot 6 = 24$, wobei diese Häppchen aber (meist) nicht quadratisch (dafür gleich groß!) sind.

Achtung: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist nicht zu verwechseln mit [illegible] **Umfang**:

U = Länge + gegenüberliegende Länge + Breite + gegenüberliegende Breite

= Länge mal 2 + Breite mal 2

⇒ $\boxed{\text{U = (Länge plus Breite) mal 2}}$,

denn, da es sich um ein Rechteck handelt, sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.

⇒ Der Umfang ist eine Länge und hat als Einheit eine Längeneinheit.

Aufgaben

1. Berechne den Umfang des oben abgebildeten Rechtecks.
2. Ein Rechteck ist 12 m lang und hat 84 m² Flächeninhalt. Berechne Breite und Umfang.
3. Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit und hat 42 cm Umfang. Berechne Länge, Breite und Flächeninhalt.
4. Wie zählt man (geschickt) eine größere Menge gleicher Münzen?

M 4 Darstellung in Diagrammen

Zahlen lassen sich nicht nur am Zahlenstrahl darstellen und vergleichen, sondern auch mit **Säulen-**, **Balken-** und **Kreisdiagrammen** – oder einfach mit **Strichlisten**! Diese Darstellungen sind etwa bei Zufallsexperimenten beliebt.

Würfelt in Zweiergruppen 360-mal mit 2 Würfeln gleichzeitig. Bildet jeweils die Augensumme und zählt alle vorkommenden Augensummen in der Strichliste:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl											

a) Stellt dieses Ergebnis nun als **Säulendiagramm** dar.

Tipp

Wählt dabei eine sinnvolle Einheit für die Säulenhöhe, z. B. 1 cm für [illegible] „Treffer“.

Dreht man das Säulendiagramm um 90 Grad nach rechts, erhält man ein **Balkendiagramm** (müssen wir also nicht extra zeichnen).

b) Stellt das Ergebnis schließlich noch als **Kreisdiagramm** dar (um den Mittelpunkt hat der Vollkreis den Winkel 360 Grad, d. h., für jeden [illegible] gibt es ein „Kuchenstück“ von 1 Grad Mittelpunktswinkel). Welche Augensumme hat das größte „Kuchenstück“?

Aufgaben

Zeichnung: O. Wetterauer

1. Sucht euch (wieder im Zweierteam) ein beliebiges deutschsprachiges Buch und wählt dar[illegible] Text aus. Beginnt an einer Stelle eurer Wahl. Zählt die vorkommenden nächsten 360 Buchstaben (Strichliste mit 360 Strichen). Welche zwei Buchstaben sind im Deutschen die häufigsten?
2. Klassensprecherwahl [illegible] Parallelklasse (36 Schüler): Antonio erhält 15 Stimmen, Lisa [illegible] und Charlotte den Rest. Stellt das Ergebnis als Kreisdiagramm [illegible]
3. Bei einer Gemeinderatswahl ([illegible] Ratsmitglieder werden gewählt) erhalten die Kandidaten der A-Partei 15 „Mandate“, die der B-Partei 16 und die der C-Partei die übrigen 5. Keine der Parteien verfügt über die absolute Mehrheit (also mehr als die Hälfte der Mandate, hier mindestens 1[illegible]). Welche „Koalitionen“ von jeweils zwei Parteien könnten zusammen [illegible], weil sie gemeinsam die absolute Mehrheit haben?
4. Der römische Feldherr **Caesar** ließ seine Nachrichten verschlüsseln, damit nach einem Überfall seiner Boten die Information wer[illegible] weil sie in verschlüsselter Form keinen Sinn ergab. Nur derjenige, der die Nachricht bekommen sollte, kannte den Entschlüsselungscode.

   Beim **Caesar-Code** wird jeder Buchstabe um gleich viele Stellen in dieselbe Richtung verschoben im Alphabet (also z. B. [illegible] statt A, F statt B, G statt C usw.). Zu Caesars Zeiten war das ausreichend, heute im Computerzeitalter ist der Caesar-Code zu unsicher.

   Warum?

Zeichnung: O. Wetterauer

[illegible]

Mit der kostenlosen Software **CryptTool** (http://www.cryptool-online.org/) kannst du beliebige Texte verschlüsseln, im einfachsten Fall mit dem Caesar-Code. Außerdem kann das Programm ganz schnell Buchstaben zählen und liefert ein Säulendiagramm. Nach Aufgabe 1 kennst du die häufigsten Buchstaben im Alphabet.

M 5 Speisekarten als Baumdiagramme – Kombinatorik I

Lecker[illegible] Gemüse

© iStock/Thinkstock

Ein Restaurant bietet zur Vorspeise 2 Alternativen V_1 und V_2 an. Dazu gibt es 4 unterschiedliche Hauptgerichte H_1, H_2, H_3 und H_4 sowie 3 verschiedene Nachspeisen N_1, N_2 und N_3 zur Auswahl. Willi Wampe möchte abwechslungsreich essen und wählt jeden Tag eine andere Kombination.

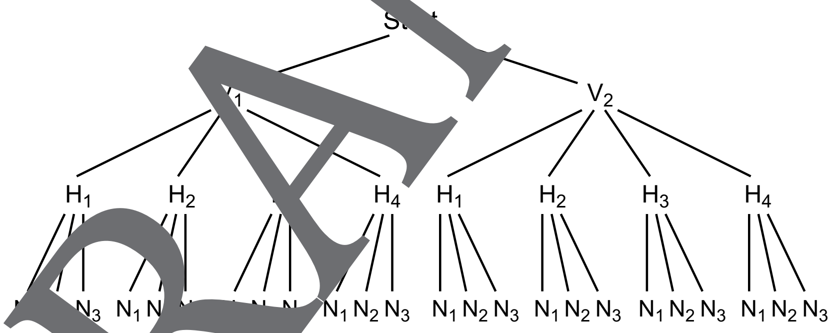
Wie viele Tage lang geht das so?

Zunächst wählt er eine der 2 Vorspeisen. Egal welche er ausgesucht hat – er kann sie mit 4 verschiedenen Hauptspeisen kombinieren, dafür gibt es insgesamt $2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten. Jede dieser 8 Möglichkeiten kann er nun mit jeder der 3 Nachspeisen kombinieren, sodass es insgesamt $8 \cdot 3 = 24$ verschiedene Menüs gibt. Am 25. Tag müsste er sich wiederholen.

Hier die Menüs der Reihe nach als **Liste**:

$V_1H_1N_1$, $V_1H_1N_2$, $V_1H_1N_3$, $V_1H_2N_1$, $V_1H_2N_2$, $V_1H_2N_3$, $V_1H_3N_1$, $V_1H_3N_2$, $V_1H_3N_3$, $V_1H_4N_1$, $V_1H_4N_2$, $V_1H_4N_3$, $V_2H_1N_1$, $V_2H_1N_2$, $V_2H_1N_3$, $V_2H_2N_1$, $V_2H_2N_2$, $V_2H_2N_3$, $V_2H_3N_1$, $V_2H_3N_2$, $V_2H_3N_3$, $V_2H_4N_1$, $V_2H_4N_2$, $V_2H_4N_3$.

Die Berechnung nennt man „**Zähl[illegible]** [illegible]n aller kombinierbaren Möglichkeiten). Hier die Speisekarte mit allen 24 Menüs als „**Baumdiagramm**“:



Das **Baumdiagramm** wird schnell sehr groß. So gäbe es etwa bei 5 Vor-, 7 Haupt- und 6 Nachsp[illegible] bereits $5 \cdot$ [illegible] $= 210$ Menüs und der Baum hätte unten 210 Zweigchen. Oft hilft ein (evtl. [illegible]) teilweise skizziertes Baumdiagramm jedoch beim Verständnis eines Zählproblems.

Aufgaben

Maria

© iStock/Thinkstock

[illegible] Die „[illegible]debewusste“ Maria besitzt 3 verschiedene Hüte, 5 Blusen, [illegible] Röcke oder alternativ dazu 3 Hosen, 2 Paar Socken und 3 Paar Schuhe.

a) Wie viele Möglichkeiten hat Maria, wenn sie je eine Kopfbedeckung, ein Ober-, ein Unterteil sowie Socken und Schuhe anzieht?

b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn Maria auch ohne Kopfbedeckung gehen könnte, aber nicht mit Hose?

2. Ein vierstelliges Zahlenschloss hat jeweils die Ziffern 0 bis 9. Wie viele mögliche „Geheimzahlen“ gibt es?

M 6 Zeitvertreib im Wartezimmer – Kombinatorik II

So schön es ist, wenn sich ein Arzt für jeden Patienten Zeit nimmt und auch Notfälle „reinschiebt“, so ärgerlich sind dennoch lange Wartezeiten in vollen Wartezimmern. Das muss aber nicht so sein.

Schließlich könnten die wartenden (sagen wir 6) Patienten im Minutentakt die (ebenfalls 6) Sitzplätze tauschen, da vergeht die Zeit viel schneller! Wie viele mögliche **Sitzordnungen** haben die 6 Personen eigentlich?

Volles Wartezimmer

© iStock/Thinkstock

Stellen wir uns vor, das Wartezimmer sei leer und Patient [illegible] komme herein.

Dann hat er 6 Stühle zur Auswahl. Egal auf welchen [illegible] Platz nimmt [illegible] der nächste Patient P_2 hat dann 5 Möglichkeiten, wegen der beliebigen Kombinierbarkeit [illegible] zu zweit $6 \cdot 5 = 30$. Für den dritten bleiben 4 Möglichkeiten usw., insgesamt also $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ für nur 6 Patienten (die Abkürzung 6! heißt dabei „**sechs Fakultät**“ und bedeutet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 6 abwärts). Allgemein also:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Wie viele Möglichkeiten haben die 6 Patienten für ihr Spiel, wenn im Wartezimmer 8 Stühle stehen?

Der erste hat jetzt 8, der zweite 7 usw., also insgesamt

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$ Möglichkeiten.

Bei Wechsel im Minutentakt [illegible] sich der Arzt immerhin 336 Stunden Zeit lassen bzw. 14 Tage, bis er den nächsten aufruft. Du siehst: Fakultäten werden schnell sehr groß (8! ist schon 40 320).

Ein weiteres Beispiel: PIA vertauscht manchmal aus Spaß die Buchstaben ihres Vornamens und erhält dabei IPA, PAI, API, AIP, IAP oder eben PIA.

Wie viele Möglichkeiten dafür hat KARL, wie viele STEFAN?

KARL hat für [illegible] ersten Buchstaben 4 Möglichkeiten, für den zweiten 3, für den dritten noch 2, und der [illegible] ist dann klar, also hat er 4! = 24 Möglichkeiten,

STEFAN sogar 6! = 72[illegible]

Aufgaben

1. ANTON ist enttäuscht, denn trotz 5 Buchstaben findet er statt 5! = 120 nur 60 mögliche „Schreibweisen“. Woran liegt das?
2. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es für die Buchstaben des Wortes SCHNEEEULE, wie viele bei PAPAGEI?
3. Eine Fußballmannschaft (11 Personen) wählt zufällig je ein Trikot aus einer Kiste mit 13 (nummerierten) Trikots. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Ein Teil einer Fußballmannschaft

© Monkey Business/Thinkstock

M 7 Tippkarten

Tipp **zu M 1, Aufgabe 2**

Untersuche zunächst (bei der Einerstelle „9“ beginnend), welchen Stellenwert die linke Ziffer 1 hat.

Tipp **zu M 1 B, Aufgabe 1**

Suche zunächst die höchste Zweierpotenz, die in 31, 17 bzw. 2016 enthalten ist und subtrahiere sie – sie liefert die linke Stelle mit dem höchsten Wert [illegible]).

Verfahre mit dem Rest genauso weiter.

Tipp **zu M 1 B, Aufgabe 2**

Die Stellenwerte im Zweiersystem sind 1, 2, 4, 8, 16 usw. (die Zweierpotenzen).

Untersuche zunächst (durch Abzählen der [illegible]) den Stellenwert links sowie alle weiteren Stellenwerte mit einer „1“ – ihre Summe gibt die Zahl im Dezimalsystem.

Tipp **zu M 2**

Bestimme zunächst die Einheit.

Tipp **zu M 2 A**

Suche erst das Maß für den Einer- oder Zehnerschritt.

Tipp **zu M 3**

Die „**Probe[illegible]n**“ (z. B. Probe auf den 1./2. Faktor) helfen weiter: Man erhält den 1./2. Faktor, indem man das Produkt durch den 2./1. Faktor teilt.

Tipp **zu M [illegible]**

Denke dir bei Bedarf ein Baumdiagramm (auch wenn es aufwändig zu zeichnen ist).

Tipp **zu M 6**

Mehrfach vorkommende Buchstaben können untereinander Plätze tauschen, ohne dass der Leser dies bemerkt, d. h. es sind keine zusätzlichen Möglichkeiten.

M 8 Bist du fit? – Teste dein Wissen!

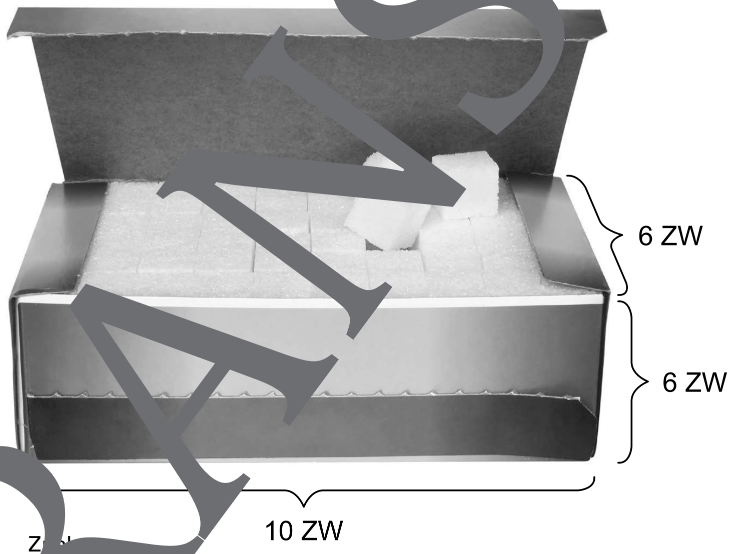
1. Die Brüder Martin und Norbert müssen im Haushalt helfen. Mutter möchte, dass der Müll zur Tonne getragen wird. Die beiden losen aus, wer diese unangenehme Tätigkeit erledigen muss. Dabei spielen sie das ca. 2000 Jahre alte Spiel „Schnick – Schnack – Schnuck“, auch bekannt als „Schere – Stein – Papier“ oder „Ching – Chang – Chong“. Dabei gewinnt Stein gegen Schere, Schere gegen Papier und Papier gegen Stein.

   Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Schere, Stein, Papier © iStock/Thinkstock

© iStock/Think

2. Schreibe die Zahl CDXLVI in arabischen Ziffern und [illegible] Zahl 299[illegible] [illegible] römischen Zahlzeichen.
3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den Buchstaben des Namens MARIANNE ein „Wort“ zusammenzusetzen?
4.



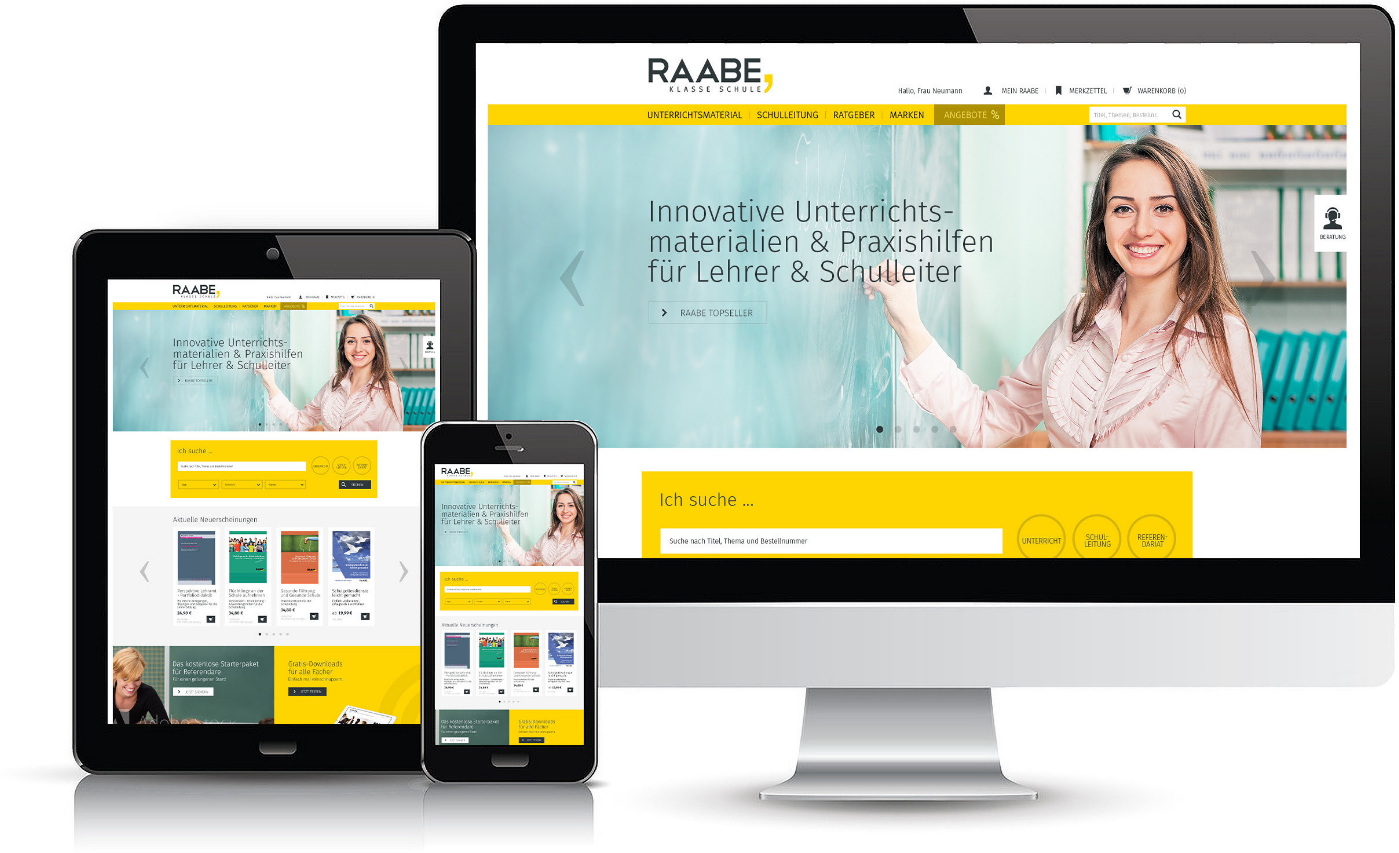
Z[illegible]

© iStock/Thinkstock

   Bestimme geschickt die Anzahl der Zuckerwürfel in der abgebildeten Packung.
5. Ein Quadrat hat 52 cm Umfang. Berechne den Flächeninhalt.
6. Welche Zahl liegt auf dem Zahlenstrahl um 59 Einheiten rechts von der Mitte zwischen 1234 und [illegible]678?
7. Daniel wirft 360-mal eine Münze. Sie zeigt 166-mal „Kopf“, sonst „Zahl“. Zeichne ein Kreisdiagramm.
8. Schreibe in Ziffern: sieben Quadrillionen dreihundertvierundsechzig Trilliarden achtundvierzig Millionen sechstausendsiebzehn.
9. [illegible]na geht zur Eisdiele und hat die Auswahl zwischen 13 Eissorten, wahlweise mit oder ohne Sahne, im Becher oder in der Waffel. Wie viele Eisvariationen mit einer Kugel sind möglich?
10. Welche Zahl ist auf dem Zahlenstrahl von der 335 fünfmal so weit entfernt wie von der 479?

Münze

© iStock/Thinkstock



RAABE, KLASSE SCHULE
Hallo, Frau Neumann
MEIN RAABE
MERKZETTEL
WARENKORB (0)
UNTERRICHTSMATERIAL
SCHULLEITUNG
RATGEBER
MARKEN
ANGEBOTE %
Innovative Unterrichts-materialien & Praxishilfen für Lehrer & Schulleiter
RAABE TOPSELLER
BERATUNG
Ich suche ...
Suche nach Titel, Thema und Bestellnummer
UNTERRICHT
SCHUL-LEITUNG
REFEREN-DARIAT
Aktuelle Neuerscheinungen
Das kostenlose Starterpaket für Referendare
Gratis-Downloads für alle Fächer