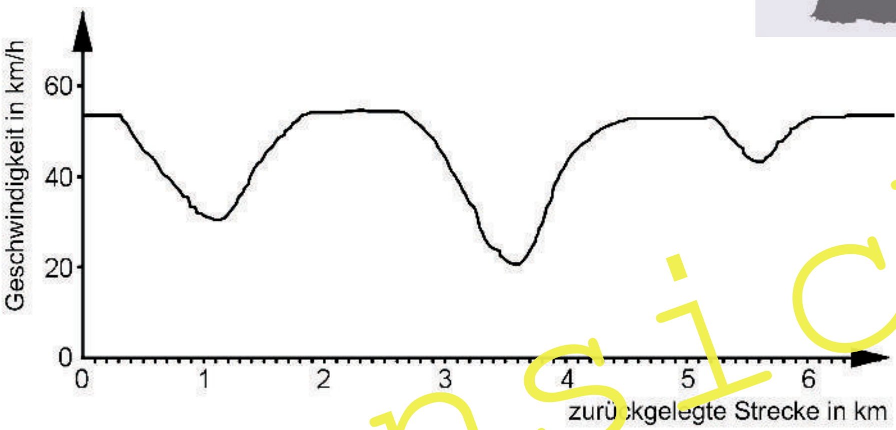
Eine Grundvorstellung vom Funktionsbegriff entwickeln – ein Konzept für die Praxis (Modul Z)

Tom Bauernfeind, Dortmund



Der Graph zeigt den Geschwindigkeitsverlauf eines Rennradfahrers bei der Tour de France während einer „fliegenden“ Runde auf den Champs-Élysées in Paris.

Klasse: 9/10.

Dauer:
- je nach Einsatz, ca. 3 Doppelstunden für die Bearbeitung aller vier Module (in diesem Beitrag: nur das Basismodul B (**CD-ROM 73**) und das Folgemodul Z, die restlichen Module finden Sie in einem Folgebeitrag noch in 2019)
- für den Diagnose-Test (**CD-ROM 73**) ca. 40 min, bei gemeinsamer Auswertung durch die Lernenden ca. 1 Doppelstunde, für das Basismodul ca. 1 Schulstunde

Inhalt: Zuordnungsaspekt von Funktionen

Ihr Plus:

- ✓ komprimiertes Fachwissen
- ✓ praktikabler Diagnosetest (und Nachtest in einem Folgebeitrag)
- ✓ Module, die im Gesamtkonzept oder isoliert einsetzbar sind
- ✓ insbesondere geeignet für den Förderunterricht

Modul Z thematisiert den Zuordnungsaspekt auf der Grundlage verschiedener Darstellungen, welche wiederum die Zuordnung auf besondere Weise ausdrücken. Zunächst wird nach einer kurzen Einführung und der Formulierung der Leitfrage „Welches f(x) gehört zu x?“ (Büchter, Henn 2010) ebendieser in Bezug zu den verschiedenen Darstellungen mit zahlreichen Beispielen nachgegangen. Im Aufgabenteil sollen die Lernenden das im Einführungstext komprimierte und reaktivierte Wissen in vielfältigen Aufgaben anwenden. Während die Lernenden in den Einstiegsaufgaben langsam an die Anwendung in Sachzusammenhängen herangeführt werden, behandeln die Vertiefungsaufgaben komplexere Kontexte.

Didaktisch-methodische Hinweise zu Modul Z

Den **Grundlagenbeitrag mit Modul B** und dem **Diagnosetest** finden Sie auf der **CD-ROM 73**.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	**Leitidee**	**Inhaltsbezogene Kompetenzen** Die Schüler ...	**Anforderungsbereich**
K1, K 2, K 3, K 4, K 5	L 4	... nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, ... erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder grafischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar, ... analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale), .. lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen.	I – II, z. T. III

Auf einen Blick

Material	**Thema**	**Stunden**
CD-ROM 73	**Basismodul B** Diagnose-Test und Einführungsartikel (EL 87, Juni 2016)	
M 1	**Modul Z – Zuordnungsaspekt von Funktionen** Einführungstext zur Zuordnungsvorstellung Dieser muss jedem Lernenden in Kopie vorliegen	1.
M 2	**Zuordnungsaspekt von Funktionen – Einstiegsaufgaben** Das Material muss den Lernenden zur Bearbeitung vorliegen	2.
M 3	**Zuordnungsaspekt von Funktionen – Vertiefungsaufgaben** Das Material muss den Lernenden zur Bearbeitung vorliegen	3.

Minimalplan

Je nach Intention, Bedarf oder zeitlichen Aspekten kann dieses Modul isoliert bearbeitet werden. In diesem Falle ist die Bearbeitung in Form von Hausaufgaben oder innerhalb einer Doppelstunde im Unterricht denkbar.

M 1 Modul Z – Zuordnungsaspekt von Funktionen

Einführung

Funktionen stellen Zusammenhänge zwischen zwei Größen her: Eine Funktion drückt den Zusammenhang zwischen Uhrzeit und Temperatur, Tageszeit und beim Wandern zurückgelegter Strecke, Alter und Größe usw. aus, indem sie einem Wert der Ausgangsgröße einen Wert der anderen Größe eindeutig zuordnet.

Durch dieses Zuordnen entstehen **Wertepaare**, die aus dem Wert der Ausgangsgröße (x-Wert: x) und dem durch die Funktion zugeordneten Funktionswert (y-Wert: y oder f(x)) bestehen.

Beim Zuordnen eines Wertes zu einem anderen nimmt man immer nur eine **Stelle** x_0 in den Blick, denn man fragt danach, welchen Wert die Funktion dieser Stelle (Ausgangswert) zuordnet. Die leitende Frage hierbei lautet:

Welches f(x) gehört zu welchem x?

Wie bereits in Modul B dargestellt, bieten die verschiedenen Darstellungen von Funktionen verschiedene Möglichkeiten, die einander zugeordneten Werte abzubilden.

Zugleich bietet jede der Darstellungen auch die Möglichkeit, zu einer Ausgangsgröße die durch die Funktion zugeordnete Größe zu bestimmen bzw. diese abzulesen.

Verbale Beschreibung

Ist eine Funktion durch eine verbale Beschreibung oder in Kurzform (vgl. Modul B) gegeben, so kann man diese oftmals nutzen, um zu einer Ausgangsgröße den zugeordneten Funktionswert, und damit ein *Wertepaar*, zu bestimmen.

Beispiel:

Der Seitenlänge (in cm) wird der Flächeninhalt des Quadrats (in cm²) zugeordnet.

Kurzform: Seitenlänge (in cm) $\longrightarrow$ Flächeninhalt (in cm²)

Wählt man nun einen beliebigen Wert als Seitenlänge (Ausgangswert), kann man einfach durch Quadrieren des Wertes seinen Funktionswert berechnen.

Der Seitenlänge 2 cm wird somit der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge 2, also $2^2 = 4$ zugeordnet. Das Wertepaar besteht also aus dem Ausgangswert 2 und dem Funktionswert 4, kurz $(2|4)$.

Algebraische Darstellung

Ist eine Funktion durch ihre Funktionsgleichung gegeben, so kann man einfach **durch Einsetzen eines Ausgangswertes für x** den durch die Funktion zugeordneten Funktionswert (y-Wert) berechnen.

Beispiel: $f(x) = 3x - 2$

Man kann nun einen beliebigen Ausgangswert wählen, z. B. $x = 4$, und diesen für x in die Gleichung einsetzen:

$f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$

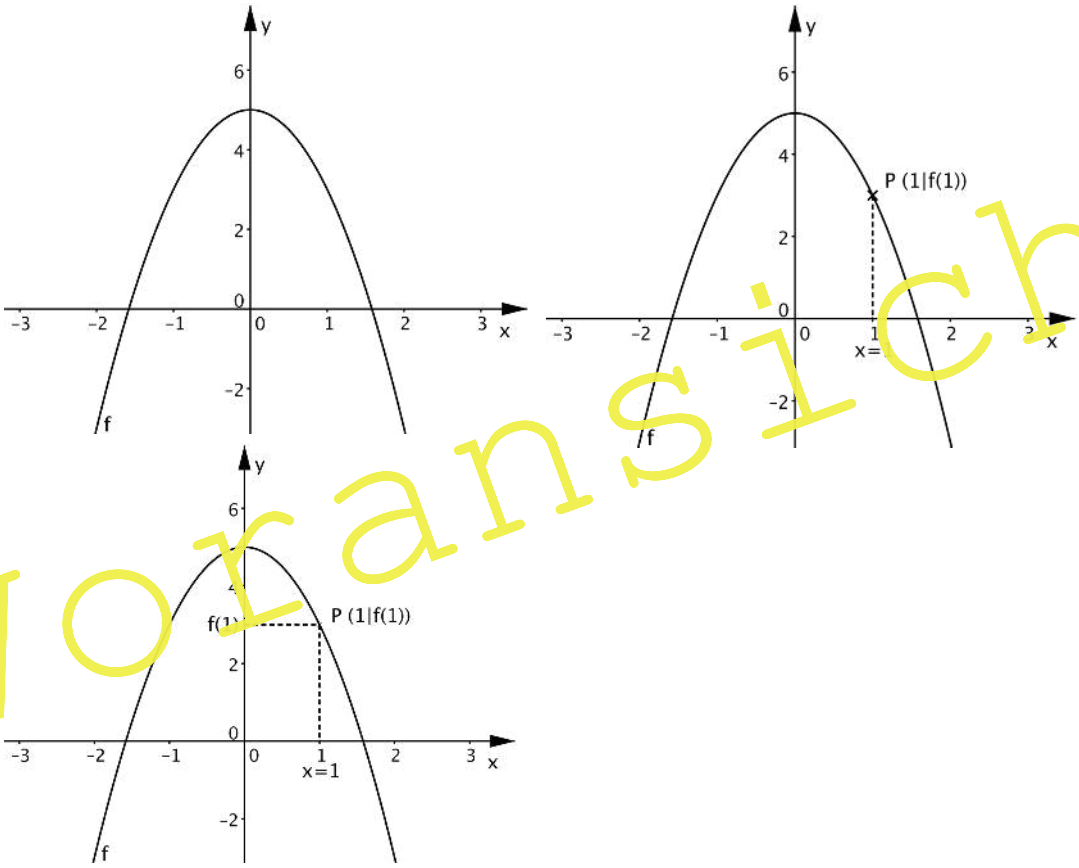
Somit hat man den zu $x = 4$ gehörenden Funktionswert $f(4) = 10$ bestimmt, und das Wertepaar lautet 4 und 10, kurz $(4|10)$.

All die durch f eindeutig bestimmten Wertepaare ergeben als Punkte im Koordinatensystem den Graphen der Funktion f. Da man für ein möglichst genaues Zeichnen des Graphen einer Funktion oftmals möglichst viele solche Punkte bestimmen muss, bedient man sich einer Wertetabelle, um diese Punkte übersichtlich zu bestimmen und zu sammeln.

2. **Punkte ablesen:** Ist eine Funktion als Graph gegeben, möchte man oftmals einzelne Wertepaare bestimmen. Hierfür geht man von einem Ausgangswert aus und bestimmt den zugehörigen Funktionswert.

Beispiel:

Gegeben ist der folgende Graph einer Funktion f. Man möchte wissen, welcher Funktionswert dem Ausgangswert $x = 1$ zugeordnet ist. Hierzu geht man wie folgt vor:



Man geht von dem Ausgangswert (hier $x = 1$) aus und geht von diesem senkrecht nach oben (bzw. unten), bis man den Graphen erreicht. Zur Erinnerung: der Punkt des Graphen besitzt den Ausgangswert als x-Koordinate.

Es ist nun die y-Koordinate des Punktes zu bestimmen, da diese dem Ausgangswert zugeordneten Funktionswert $f(1)$ entspricht.

Hierfür geht man vom Graphen aus waagerecht nach rechts (oder links) bis man die senkrechte Achse (y-Achse) erreicht. Hier befindet sich der gesuchte Funktionswert $f(1)$.

Dieser muss nun nur noch abgelesen werden: $f(1) = 3$.

Beachten Sie: Diese Methode kann sehr ungenau sein.

M 2 Zuordnungsaspekt von Funktionen – Einstiegsaufgaben

Aufgabe 1

Liegt die Funktion in Kurzform (Schreibweise mit Pfeil) vor, so beschreiben Sie die Funktion zunächst verbal (bzw. umgekehrt). Schreiben Sie dann die Funktionsvorschrift auf. Berechnen Sie anschließend die zu den Ausgangswerten 2, 6 und 16 gehörenden Funktionswerte. Notieren Sie die Wertpaare.

a) Der Seitenlänge (in cm) eines Rechtecks mit einer Breite von 2 cm wird der Flächeninhalt des Rechtecks (in cm^2) zugeordnet.

b) Einer Zahl wird ihr 5-Faches zugeordnet.

c) Zahl $\longrightarrow$ Differenz des Quadrats der Zahl und 3

d) Wert $\longrightarrow$ Summe des 2-Fachen des Werts und 10

Aufgabe 2

Füllen Sie je gegebener Funktion eine Wertetabelle aus und zeichnen Sie die Graphen aller Funktionen in das gegebene Koordinatensystem.

(1) $y = x$ (2) $f(x) = 2{,}5x$ (3) $f(x) = -x$ (4) $f(x) = \frac{1}{2}x$

(5) $f(x) = -\frac{2}{5}x$ (6) $f(x) = -2x$

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

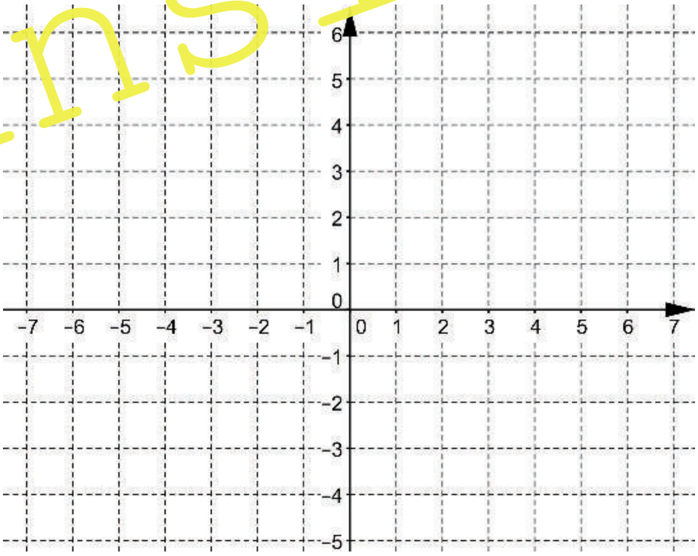
x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					



Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x$.

a) Bestimmen Sie die Funktionswerte von f an den Stellen –2 und 3.

b) Geben Sie die Definitionsmenge D_f an.

c) Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetabelle den Graphen von f in ein Koordinatensystem im Intervall $[-2;4]$.

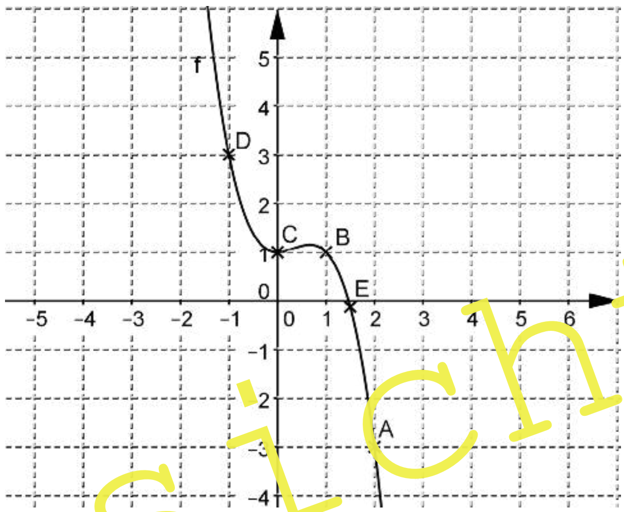
Aufgabe 4

Welche der Punkte $P(2|5)$, $Q(-3|8)$, $R(0{,}5|-0{,}5)$, $S(10|101)$ liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 1$?

Aufgabe 5

a) Lesen Sie die auf dem Graphen der Funktion f liegenden Punkte A, B C, D und E ab und notieren Sie die Punktkoordinaten in der Form A(…|…) etc.

b) Erstellen Sie anhand der abgelesenen Punkte eine Wertetabelle.



zu Aufgabe 5

Aufgabe 6

An einem Tag im Sommer wurden die Temperaturen aufgezeichnet. Dabei betrug die Temperatur um 8 Uhr morgens 14 Grad Celsius. Um 11 Uhr waren es bereits 22 Grad, um 12 Uhr mittags 25 Grad. Nach einem Sommerregen kühlte es sich zwei Stunden später auf 18 Grad ab. Am Abend waren es um 22 Uhr noch 19 Grad.

a) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Zuordnung Uhrzeit → Temperatur (in Grad Celsius) in ein Koordinatensystem.

b) Beenden Sie den folgenden Satz: Die Zuordnung ist eine Funktion, weil …

c) Betrachten Sie nun die Zuordnung Temperatur (in Grad Celsius) → Uhrzeit. Handelt es sich hierbei auch um eine Funktion? Begründen Sie.

Aufgabe 7

Nach einer Faustformel kann man die Körpergröße eines Menschen anhand der Länge des Schienbeins berechnen: Multipliziert man die Schienbeinlänge in cm mit 5 und zieht 15 cm ab, so erhält man die Körpergröße in cm.

a) Geben Sie für die Zuordnung Schienbeinlänge s → Körpergröße k eine Rechen-vorschrift an.

b) Füllen Sie die Tabelle aus.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Zuordnung.

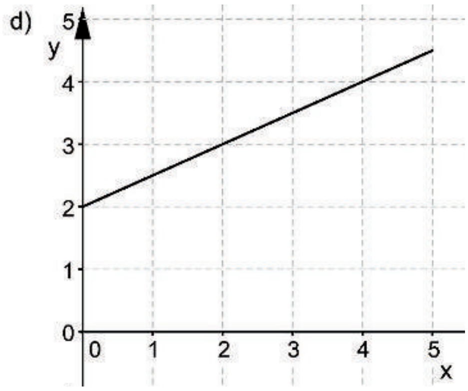
s (in cm)	34	36	38	40	42	44
k (in cm)						

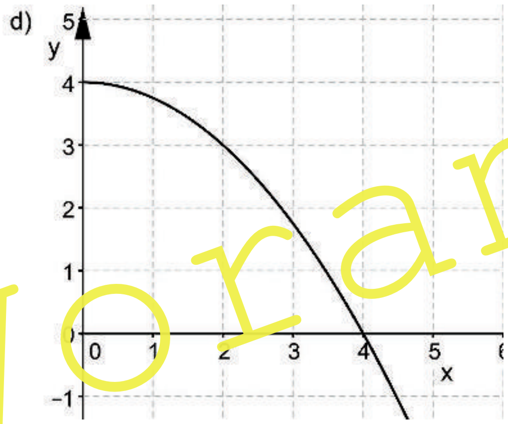
M 3 Zuordnungsaspekt von Funktionen – Vertiefungsaufgaben

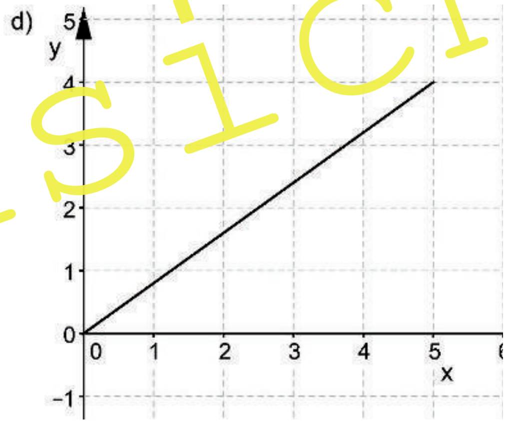
Aufgabe 1

Welche Graphen, Tabellen und Funktionsterme gehören zusammen?

Graphen:







Tabellen:

(1)	
x	y
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2

(2)	
x	y
1	3,75
2	3
3	1,75
4	0

(3)	
x	y
1	2,5
2	3
3	3,5
4	4

(4)	
x	y
1	2,75
2	2,5
3	2,25
4	2

Funktionsterme:

(I) $y = 4 - 0{,}25x^2$ (II) $y = 3 - 0{,}25x$ (III) $y = 0{,}5x + 2$ (IV) $y = 0{,}8x$

Aufgabe 2

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 mit $f_1(x) = \frac{2}{3}x - 2$ und f_2 mit $f_2(x) = -\frac{4}{5}x + 1$ in ein Koordinatensystem ein.

Verwenden Sie hierzu die folgende Wertetabelle.

x	–2	–1	0	1	2	3
$f_1(x)$						
$f_2(x)$						

b) Kontrollieren Sie zunächst Ihre Lösung von Teilaufgabe a) mithilfe der Lösungen. Lesen Sie anschließend die folgenden Werte an den Graphen ab:

$f_1(-3)$, $f_2(-1{,}5)$, $f_1(1{,}5)$, $f_2(0{,}5)$, $f_1(4)$.

Bestimmen Sie die gesuchten Stellen (x-Werte), für die gilt:

$f_1(x) = -\frac{1}{3}$, $f_1(x) = \frac{1}{3}$, $f_2(x) = -1$, $f_2(x) = 2{,}5$.

c) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner; schreiben Sie die Rechenansätze jedoch jeweils zur Übung auf.

$f_1(-313)$, $f_1(18{,}25)$, $f_1\left(5\frac{2}{3}\right)$, $f_1(1027)$

$f_2(-133{,}23)$, $f_2(6{,}874)$, $f_2(19{,}4)$, $f_2(2077{,}77)$

d) Bestimmen Sie rechnerisch, welche der Punkte auf den Geraden liegen.

$P_1\left(\frac{3}{4} \middle| -\frac{3}{2}\right)$, $P_2\left(13 \middle| -\frac{47}{5}\right)$, $P_3(10\,|\,9)$

e) (1) Bestimmen Sie Stellen, an denen gilt: $f_1(x) = f_2(x)$.

(2) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus (1): Welche Bedeutung hat die Stelle grafisch?

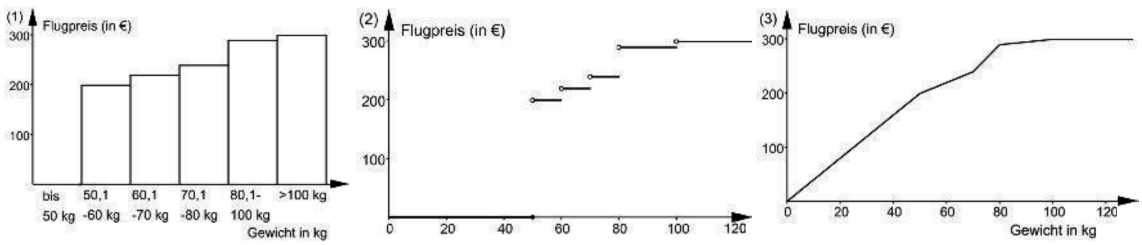
Aufgabe 3

Eine neue Billigfluggesellschaft wirbt mit einem innovativen Preismodell: Für einen Flug von Dortmund nach Wien wird der Preis nach dem Körpergewicht der Passagiere bestimmt. Leichte Passagiere fliegen dabei günstiger als schwere Passagiere. Die Preise berechnen sich hierbei für die benannte Strecke wie folgt:

Flugpreise

Fluggäste bis 50 kg	kostenlos
Fluggäste mit 50,1 bis 60 kg	199 €
Fluggäste mit 60,1 bis 70 kg	219 €
Fluggäste mit 70,1 bis 80 kg	239 €
Fluggäste mit 80,1 bis 100 kg	289 €
Fluggäste mit über 100 kg	299 €

a) Welches der folgenden Diagramme stellt den Sachverhalt richtig dar? Begründen Sie.



Aufgabe 4

Beim senkrechten Fall eines Balls von einem hohen Gebäude gilt für die Funktion

Fallzeit t (in s) $\rightarrow$ Fallweg s (in m) angenähert: $s = 5 \cdot t^2$.

a) Bestimmen Sie den Fallweg des Balls in

0,5 s; 1 s; 1,5 s; 2 s; 2,5 s; 3 s.

b) Im Folgenden sind die Höhen einiger hoher Bauwerke angegeben.

Berechnen Sie die Fallzeit des Balls für die angegebenen Höhen.

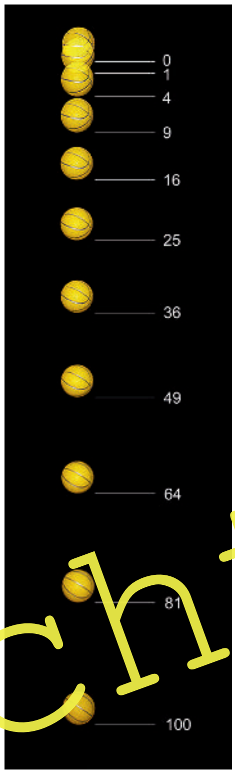
Florianturm Dortmund – 209 m

Berliner Fernsehturm *Alex* – 368 m

Gasometer Oberhausen – 118 m

Burj Khalifa Dubai – 828 m

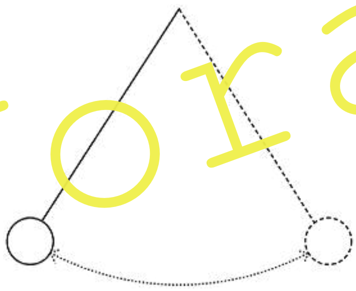
Dortmunder U – 70 m



Fallender Ball (c) Wikimedia Commons

Aufgabe 5

Die Schwingdauer eines Pendels ist die Zeitspanne, die das Pendel benötigt, um einmal hin- und herzuschwingen. Die Länge ℓ des Pendels (in Metern) kann man näherungsweise aus der Schwingdauer T (in Sekunden) nach folgender Formel berechnen: $\ell = \frac{1}{4} \cdot T^2$



a) Wie lange muss man ein Pendel machen, damit seine Schwingungsdauer 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s beträgt? Zeichne einen Graphen für die Zuordnung

Schwingungsdauer T $\longrightarrow$ Pendellänge ℓ (in m).

b) Welche Schwingungsdauer T hat ein Pendel der Länge 0,25 m, 0,75 m, 2,5 m, 6 m?
Lesen Sie am Graphen ab und überprüfen Sie durch Rechnung.

Aufgabe 6

Vier Kerzen A, B, C und D brennen. Die Abhängigkeit der Höhen h (in cm) einer Kerze von der Brenndauer t (in Std.) wird durch die Funktionsgleichungen angegeben.

A: $h(t) = -t + 22$ B: $h(t) = -1{,}5t + 30$

C: $h(t) = -0{,}7t + 15$ D: $h(t) = -0{,}8t + 12$

a) Welche Höhe hat Kerze B vor dem Anzünden?

b) Welche Kerze war am Anfang am kleinsten?

c) Wie lange brennt Kerze D?


© apomares/E+/Getty Images

I/C

Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 2 Zuordnungsaspekt von Funktionen – Einstiegsaufgaben

Aufgabe 1

a) Seitenlänge (in cm) ⟶ Flächeninhalt des Rechtecks (in cm²); $f(x) = 2 \cdot x$

$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$; $f(6) = 2 \cdot 6 = 12$; $f(16) = 2 \cdot 16 = 32$

b) Zahl ⟶ 5-Faches der Zahl; $f(x) = 5 \cdot x$

$f(2) = 5 \cdot 2 = 10$; $f(6) = 5 \cdot 6 = 30$; $f(16) = 5 \cdot 16 = 80$

c) Einer Zahl wird die Differenz ihres Quadrats und 3 zugeordnet. $f(x) = x^2 - 3$

$f(2) = 2^2 - 3 = 1$; $f(6) = 6^2 - 3 = 33$; $f(16) = 16^2 - 3 = 253$

d) Einem Wert wird die Summe des 2-fachen des Werts und 10 zugeordnet.

$f(x) = 2 \cdot x + 10$; $f(2) = 2 \cdot 2 + 10 = 14$; $f(6) = 2 \cdot 6 + 10 = 22$; $f(16) = 2 \cdot 16 + 10 = 42$

Aufgabe 2

(1)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–2	–1	0	1	2

(2)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–5	–2,5	0	2,5	5

(3)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	2	1	0	–1	–2

(4)

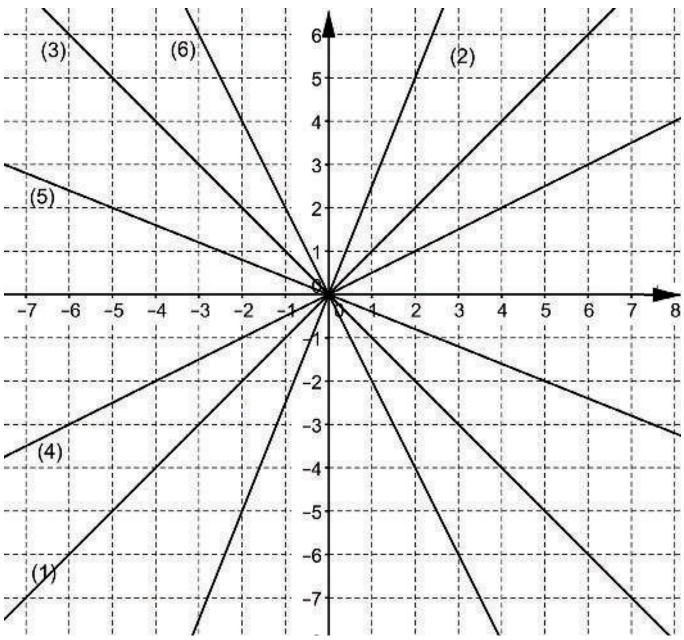
x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–1	–0,5	0	0,5	1

(5)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	0,8	0,4	0	–0,4	–0,8

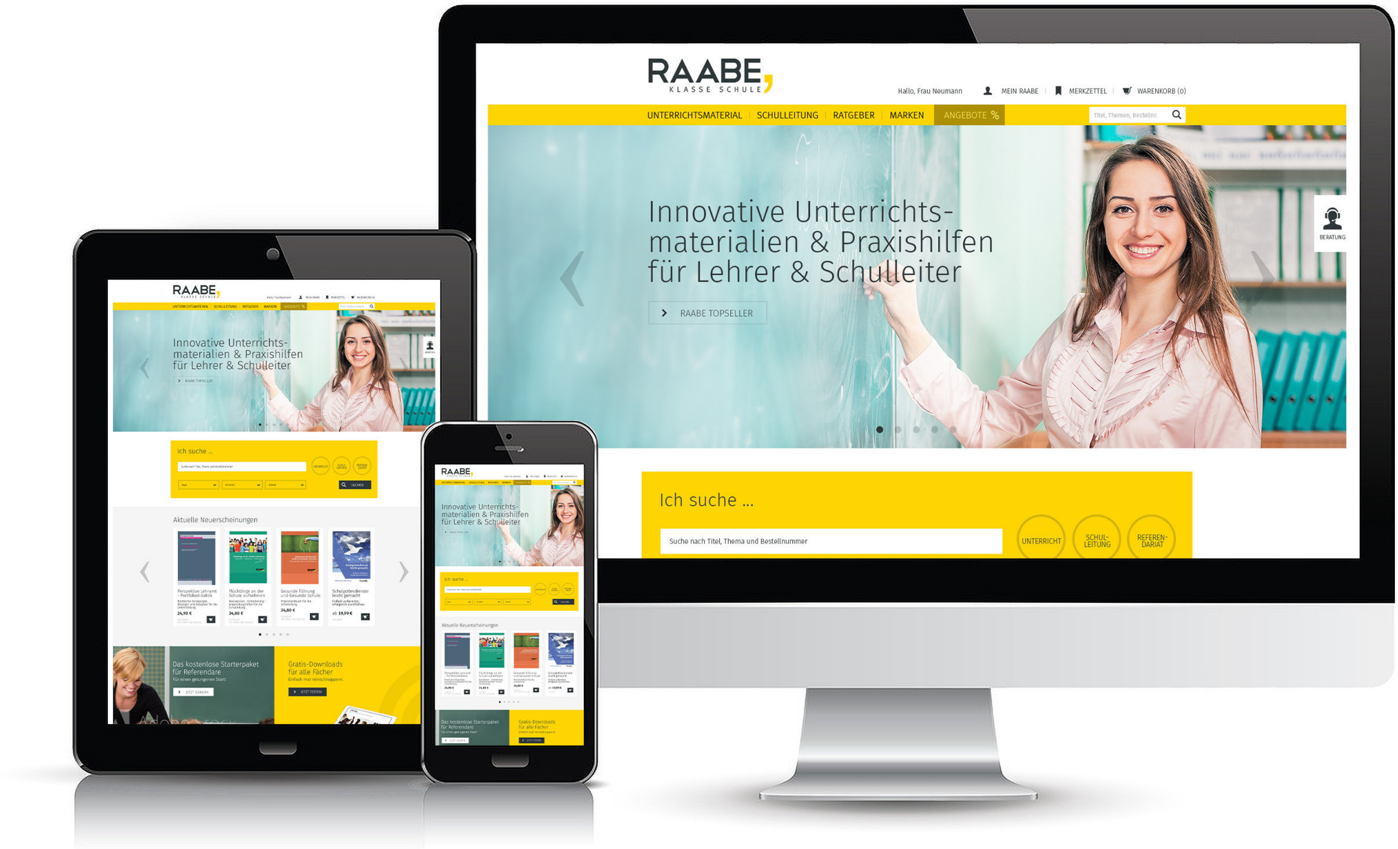
(6)

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	4	2	0	–2	–4



RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de