

## Eine Radtour durch die Pyrenäen – die mittlere Änderungsrate einführen

Michael Piechatzek, Dortmund



© Thinkstock/moodboard

Ein Profi

I/C

**Klasse:** 10 (Einführungsphase)

**Dauer:** 6 Stunden

**Inhalt:** Eine Einführung der mittleren Änderungsrate anhand von Höhenprofilen zu den einzelnen Etappen einer Radtour durch die Pyrenäen

**Ihr Plus:**

- ✓ Tippkarten ermöglichen den Schülern ein möglichst eigenständiges Lernen
- ✓ Material zur Reflexion einer Gruppenarbeit
- ✓ Lernerfolgskontrolle

Ihre Schüler untersuchen in Gruppen die Höhenprofile einer Radtour durch die Pyrenäen. Anhand dieses Beispiels führen Sie anwendungsorientiert die mittlere Änderungsrate ein. Sie verteilen sieben unterschiedliche Teilstrecken der Radtour an die Gruppen. Mithilfe der Tippkärtchen berechnen Ihre Schüler den steilsten Anstieg auf den Profilen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

„Auf und nieder, immer wieder!“ Dieser Reim trifft – umgangssprachlich formuliert – die Kernaussage des Beitrags.

Wir beschreiben die Höhenprofile einer Radtour durch die Pyrenäen mithilfe von Funktionen und bestimmen die steilsten Anstiege auf den Profilen. So führen wir die **mittlere Änderungsrate** ein. Dieser Beitrag festigt die Grundvorstellungen bei der Betrachtung von Funktionen. Funktionen sind **Zuordnungen**. Im Beitrag wird einem Punkt der Tour durch die Pyrenäen eine Höhe zugeordnet. Durch Vergleich zweier Punkte gelangt man zu einer Höhendifferenz. Dies macht es möglich, den Anstieg auf einer Teiletappe zu berechnen. Mathematisch gesehen entspricht dieser Anstieg der mittleren Änderungsrate.

Die Bedeutung der **Steigung** wird häufig beim Thema „Lineare Funktionen“ herausgearbeitet. Das Analysieren von Höhenprofilen jedoch bietet Ihren Schülern darüber hinaus die Möglichkeit, einerseits bekannte Elemente aus dem Bereich der linearen Funktionen wieder ins Gedächtnis zurückzurufen und andererseits durch den **Handlungskontext** die Bedeutung der Steigung wirklich nachzuziehen und zu verstehen. Lassen Sie Ihre Schüler auch den Umgang mit **Diagrammen** trainieren. Lernerfolgskontrollen und zentrale Klassenarbeiten kann man nur dann bewältigen, wenn man mit Graphiken und Diagrammen sicher umgehen kann.

### Lehrplanbezug

Das Thema „mittlere Änderungsrate“ wird in den Lehrplänen in Klasse 10, der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, behandelt.

### Einstieg: Selbst ist der Schifffahrer

Nutzen Sie die **Farbfolie (M 1)**, um Ihre Schülern transparent zu machen, welchen Kontext die folgende Gruppenarbeit hat. Die farbige Karte gibt den Lernenden einen ersten Eindruck von der gesamten Radfahrstrecke. **Ziel der Gruppenarbeit** ist es herauszufinden, welches der steilste Abschnitt auf der gesamten Radstrecke ist. Die Klasse hat damit ein gemeinsames Klassenziel. Es kommt dafür jedoch auf die akkurate Arbeit jeder einzelnen Gruppe an.

Lassen Sie Ihre Schüler die Berechnung der **Rahmenbedingungen (M 2)** in den Gruppen selbstständig erarbeiten. Weisen Sie Ihre Schüler aber auf die **Tippkarten (M 3)** hin. Diese können Sie als Satz vorn am Pult auslegen, sodass sie nur nach Bedarf abgeholt werden können. Motivieren Sie Ihre Schüler so zu eigenständigem Überlegen, zum mathematischen Argumentieren sowie zum Problemlösen.

In einer Präsentationsphase stellt jede Gruppe anschließend ihre Gruppenergebnisse vor. Der steilste Anstieg jeder Gruppe wird auf der Tafel festgehalten. Am Ende der Präsentationsphase werden die Ergebnisse an der Tafel miteinander verglichen, um das Etappensteilste mit dem steilsten Anstieg ausfindig zu machen.

### Reflektieren Sie die Gruppenarbeit im Plenum

Reflexion ist ein wichtiges Element im Lernprozess eines jeden Schülers. Erörtern Sie darum mit den Schülern im Plenum mithilfe von Material **M 4** Vor- und Nachteile der Gruppenarbeit. Ziel dabei ist es, im Plenum herauszuarbeiten, was den Schülern bei der Gruppenarbeit schwer gefallen ist und was leicht, um auf lange Sicht die Gruppenarbeitsphasen zu optimieren.

**Systematisieren und Festigen**

Unter Verwendung von Material **M 5** systematisieren und mathematisieren Sie die Ergebnisse der Gruppenarbeit zusammen mit Ihren Schülern. Erste Übungsaufgaben erleichtern den Schülern den Umgang mit der Formel des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Material **M 6** bzw. **M 7** beinhaltet sowohl innermathematische als auch anwendungsbezogene Aufgaben. Mit diesen Aufgaben fördern Sie neben dem Umgang mit Funktionen auch die **Modellierungskompetenz** Ihrer Schüler. Material **M 8** ermöglicht es Ihnen, den Leistungsstand Ihrer Schüler abzufragen. Auch hier variieren die Aufgaben zwischen innermathematischen und kontextbezogenen Fragestellungen.

**Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz**

| Allg. mathematische Kompetenz | Leitidee | Inhaltsbezogene Kompetenzen<br>Die Schüler ...  | Anforderungsbereich |
|-------------------------------|----------|---|---------------------|
| K 1, K 4                      | L 2, L 4 | ... berechnen die mittlere Änderungsrate zwischen zwei Punkten innerhalb eines Diagramms ( <b>M 2, M 5</b> ),     | I                   |
| K 1, K 6                      | L 2; L 4 | ... wandeln Größen um und setzen diese in eine Beziehung zueinander ( <b>M 2</b> ),                               | I                   |
| K 1, K 6                      | L 4      | ... präsentieren ihre Arbeitsergebnisse vor dem Plenum ( <b>M 2</b> ),  | I/II                |
| K 1, K 4–K 6                  | L 2, L 4 | ... reflektieren die Gruppenarbeit  | I–III               |
| K 1, K 6                      | L 4      | ... systematisieren, formalisieren und mathematisieren ihre Arbeitsergebnisse ( <b>M 5–M 7</b> ),                 | II/III              |
| K 1, K 3–K 6                  | L 4      | ... verstehen die Formel zur Berechnung der mittleren Änderungsrate ( <b>M 5</b> ),                               | II/III              |
| K 1, K 3, K 4, K 5, K 6       | L 4      | ... setzen sich mit innermathematischen und kontextbezogenen Fragestellungen auseinander ( <b>M 2, M 5–M 7</b> ). | I–III               |

**Abkürzungen****Kompetenzen**

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

**Leitideen**

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

**Anforderungsbereiche**

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

## Auf einen Blick

### Vorbereitung und Durchführung einer Gruppenarbeit

| Material    | Thema  | Stunde |
|-------------|--|--------|
| M 1<br>(Fo) | <b>Eine Radtour durch die Pyrenäen – Infos, Infos, Infos!</b><br>Thematischer Einstieg:<br>– Die Strecke auf der Landkarte<br>– Verlaufsplan der Radtour   | 1./2.  |
| M 2         | <b>Auf und nieder, immer wieder – Höhenprofile analysieren</b><br>Infos zu den Etappen, Tourendaten<br>Wie funktioniert die Gruppenarbeit?<br>Aufteilung der einzelnen Etappen auf die einzelnen Gruppen<br>Analyse der Höhenprofile; Berechnen des mittleren Anstiegs |        |
| M 3         | <b>Der geschickte Umgang mit der Steigung – Tipps geben</b><br>Tipps zum sicheren Arbeiten mit den Höhenprofilen   |        |
| M 4         | <b>Und wie lief's? – Reflexionsbogen zur Gruppenarbeit</b><br>Reflexion über das Arbeiten mit den Höhenprofilen<br>Die Inhalte aus der Gruppenarbeit   | 3.     |

### Ergebnissicherung und Definition

| Material  | Thema  | Stunde |
|-----------|--|--------|
| M 5       | <b>Der Differenzenquotient als mittlere Änderungsrate</b><br>Sicherung der Arbeitsergebnisse<br>Systematisieren sowie thematisieren der Arbeitsergebnisse<br>Erstellungsaufgaben | 4.     |
| M 6 / M 7 | <b>Üben, üben, üben – Tandembögen</b><br>Gruppenarbeit<br>Innen- und außenmathematische und anwendungsorientierte Übungen zur Bestimmung der mittleren Änderungsraten            | 5.     |

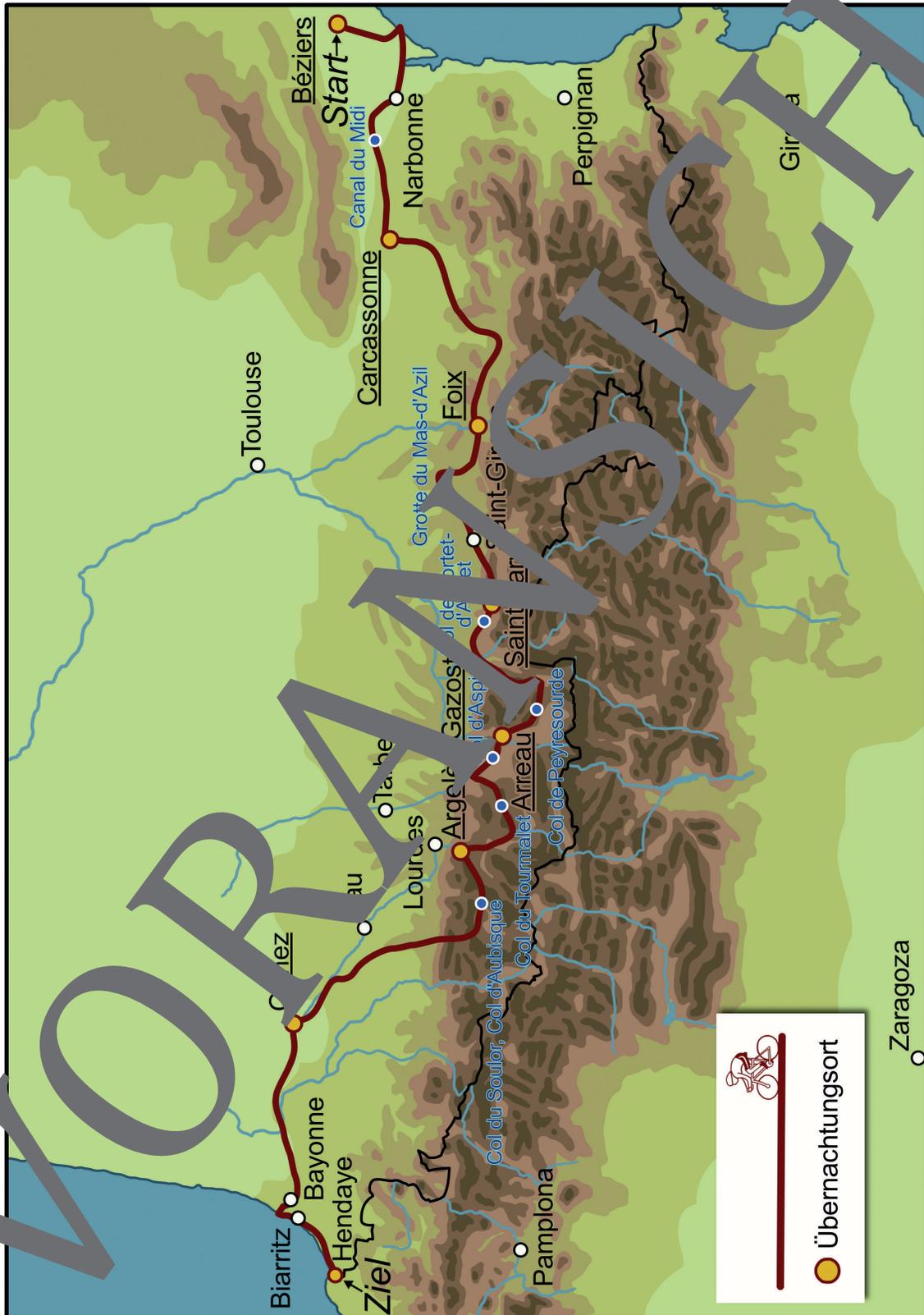
### Lernerfolgskontrolle

| Material     | Thema   | Stunde |
|--------------|---|--------|
| M 8<br>(LEK) | <b>Testen Sie Ihr Wissen!</b><br>Aufgaben zur Kontrolle des Lernstandes | 6.     |

Fo  $\hat{=}$  Farbfolie, LEK  $\hat{=}$  Lernerfolgskontrolle

|          |         |                 |     |         |          |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|
| Reihe 45 | Verlauf | Material<br>S 1 | LEK | Glossar | Lösungen |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|

### M 1 Eine Radtour durch die Pyrenäen – Infos, Infos, Infos!



## M 2 Auf und nieder, immer wieder – Höhenprofile analysieren

### Eine Fahrradtour durch die Pyrenäen

| Daten der Tour                             |             |   |            |
|--|-------------|---|------------|
| Streckenlänge:                             | 722 km      | Gesamthöhenmeter:                       | 10 299 m   |
| durchschnitt. km/Tag:                      | 103 km      | Höhenmeter/Tag:                         | 1471 m     |
| Fahrzeit (netto):                          | 32 h 21 min | Fahrzeit (mit Pausen):                  | 45 h 5 min |
| durchschnitt. Fahrzeit<br>pro Tag (netto): | 4 h 37 min  | Fahrzeit/Tag<br>(mit Pausen):           | 6 h 26 min |
| durchschnitt. Geschw.:                     | 22,3 km/h   | durchschnittl. Geschw.<br>(mit Pausen): | 16 km/h    |

|   | Strecke                 | Höhenmeter |
|---|-------------------------|------------|
| 1 | Béziers – Carcassonne   | 795        |
| 2 | Carcassonne – Foix      | 1426       |
| 3 | Foix – Saint-Lary       | 1216       |
| 4 | Saint-Lary – Arreau     | 1961       |
| 5 | Arreau – Argelès-Gazost | 2136       |
| 6 | Argelès-Gazost – Orthez | 1967       |
| 7 | Orthez – Hendaye        | 798        |

#### Aufgabenkarte für die Gruppenarbeit

Bildet insgesamt 7 Gruppen mit jeweils 3–4 Schülern.

1. Berechnet auf welchem Abschnitt der größte Anstieg zu verzeichnen ist.

**Tipp**

Gebt den Anstieg als **Dezimalzahl** und als **prozentualen Anstieg** an.

2. Haltet eure Ergebnisse in euren Heften und – jeweils einmal pro Gruppe – auf **Folie** fest.

3. Präsentiert eure Ergebnisse im Plenum.

Entscheidet als Kurs gemeinsam, in welcher Etappe der größte Anstieg war und zwischen welchen Stationen er lag.

**Tipp**

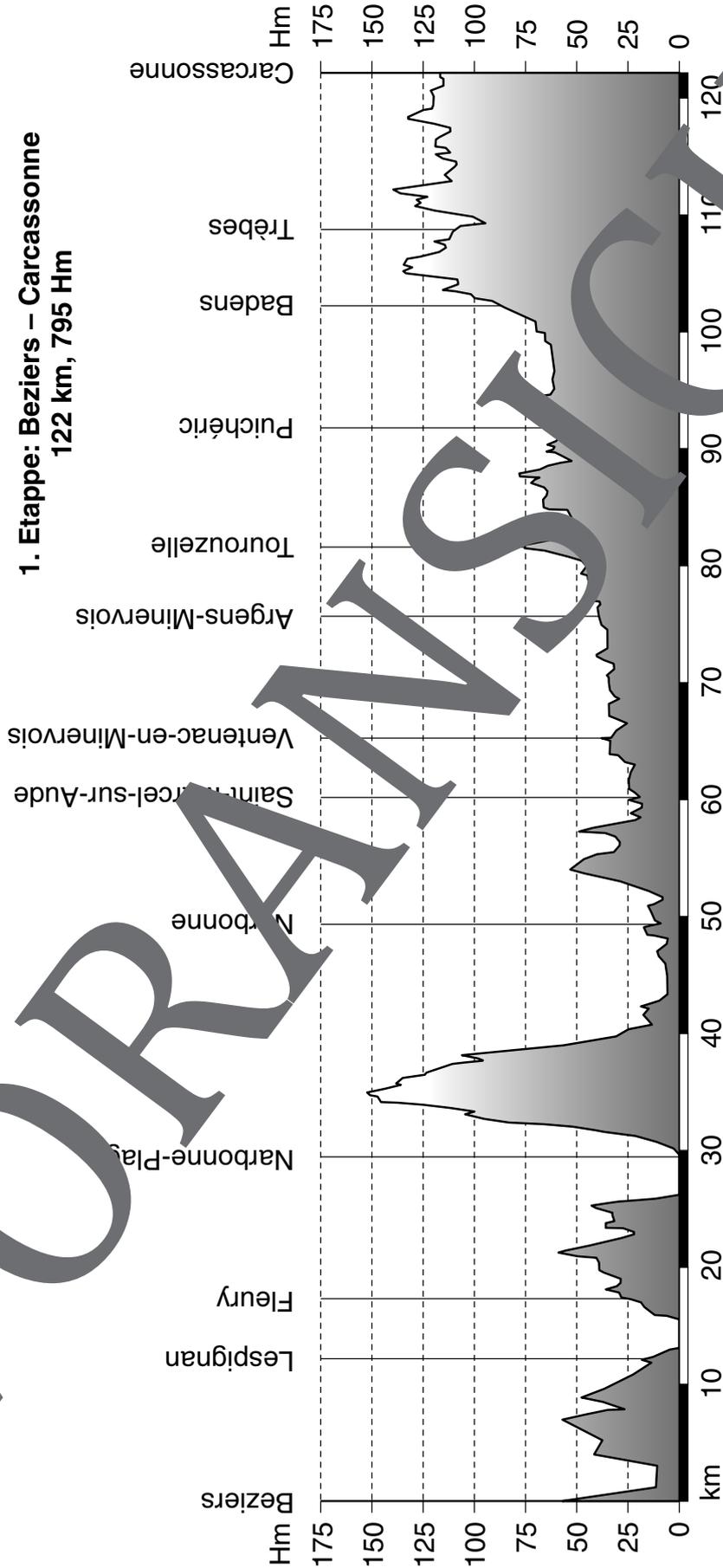
Orientiert euch bei Schwierigkeiten an den Hinweisen auf den **Tippkarten**.



|          |         |                 |     |         |          |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|
| Reihe 45 | Verlauf | Material<br>S 3 | LEK | Glossar | Lösungen |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|

Gruppe 1: Erste Etappe

1. Etappe: Beziers – Carcassonne  
122 km, 795 Hm



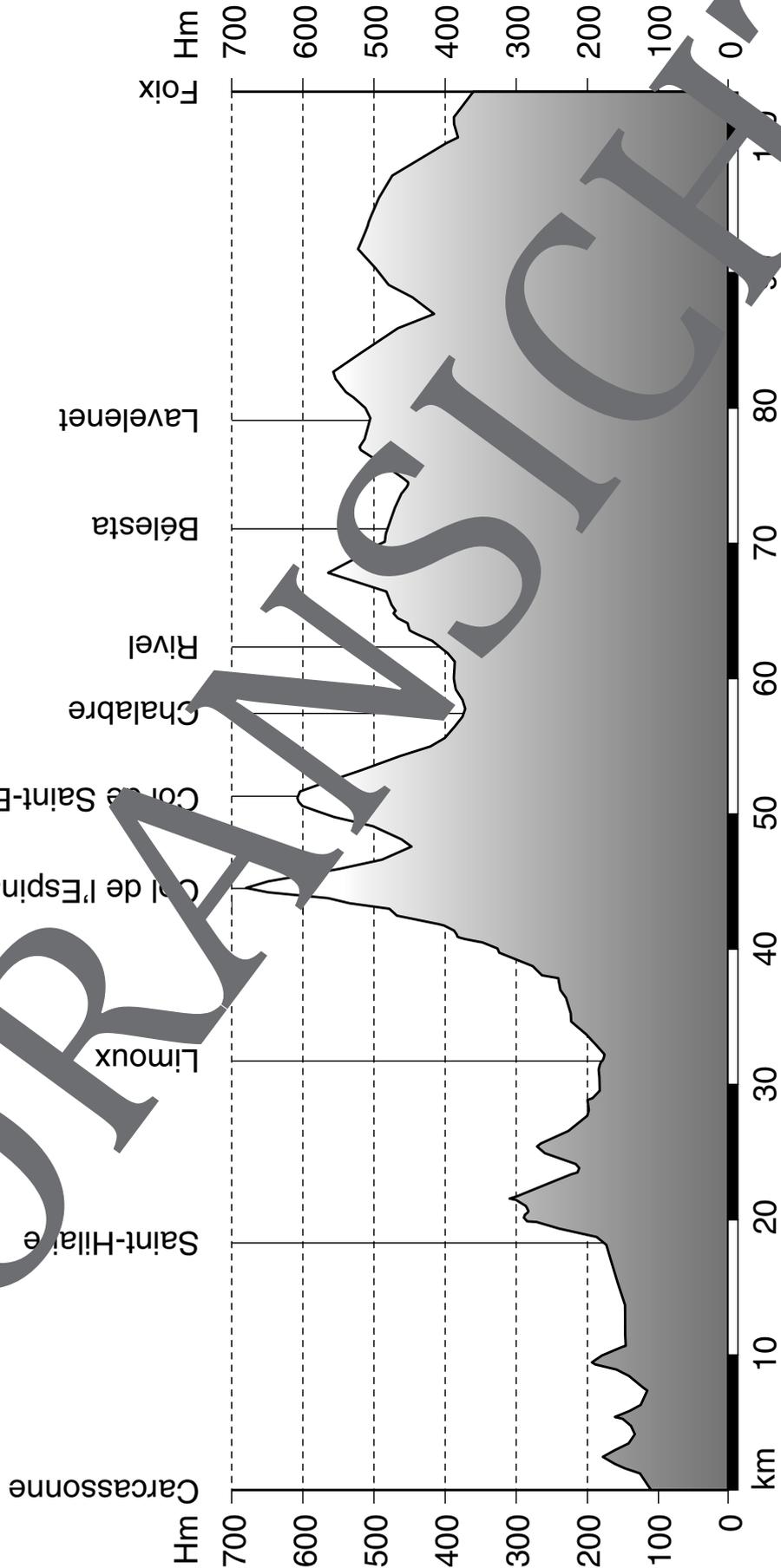
<http://pyreneeen.canal.du.midi.suedwestfrankreich.europaradtouren.de/>

| Reihe 45 | Verlauf | Material<br>S 4 | LEK | Glossar | Lösungen |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|

I/C

**2. Etappe: Carcassonne – Foix**  
103 km, 1426 Hm

**Gruppe 2: Zweite Etappe**

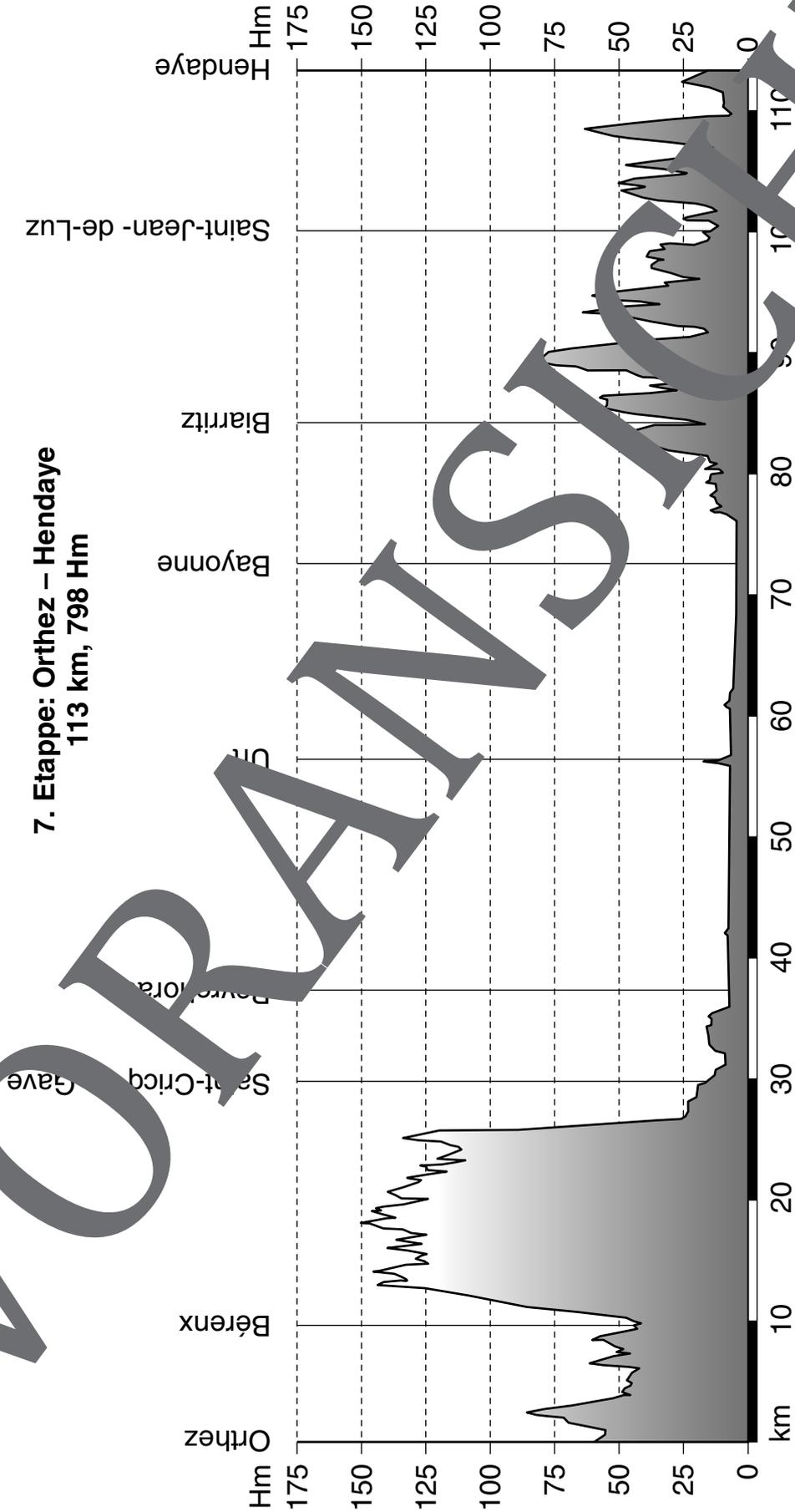


<http://pyreneen.canal.du.midi.suedwestfrankreich.europaractouren.de/>

|          |         |                 |     |         |          |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|
| Reihe 45 | Verlauf | Material<br>S 9 | LEK | Glossar | Lösungen |
|----------|---------|-----------------|-----|---------|----------|

# Gruppe 7: Siebte Etappe

7. Etappe: Orthez – Hendaye  
113 km, 798 Hm



<http://pyrenaeen.canal.du.midi.suedwestfrankreich.europaradtouren.de/>

### M 3 Der geschickte Umgang mit der Steigung – Tippkarten

#### Tipp 1

Entscheide zunächst, welche Abschnitte für eine Berechnung überhaupt in Frage kommen und welche von vornherein wegfallen.



#### Tipp 2

Zur Berechnung einer Steigung benötigst du zwei Punkte.  
Wähle sie aus dem Koordinatensystem.



#### Tipp 3

Achte auf die Einteilung der Achsen des Koordinatensystems und überführe die entnommenen Werte in die gleiche Einheit.  
Wähle entweder m oder km.

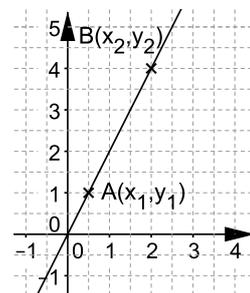


#### Tipp 4

Der „Anstieg“ ist äquivalent zur Steigung einer linearen Funktion.

Beachte hierzu:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , wobei  $m$  die Steigung der Sekante zwischen den Punkten  $A(x_1, y_1)$  und  $B(x_2, y_2)$  ist.

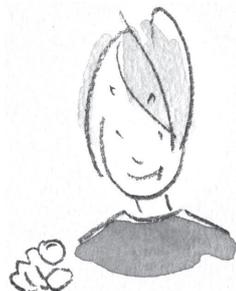


#### Tipp 5

Aus dem Steigungsfaktor kann der prozentuale Anstieg abgelesen werden.

Beispiel:

$0,2 = 20\%$ .



## M 4

## Und wie lief's? – Reflexionsbogen zur Gruppenarbeit

Nach einer Gruppenarbeit ist es wichtig, sich Gedanken zu machen, was du in der Arbeitsphase gut und was weniger gut verstanden hast. Auch solltest du die Lernatmosphäre innerhalb der Gruppe reflektieren. Dabei hilft deiner Gruppe folgendes Raster:

**Gruppenresultate**

I/C

### Zum Umgang mit dem Gruppenreflexionsbogen

1. Jeder von euch bekommt einen äußeren Bereich des Rasters, in den er binnen zwei Minuten alles einträgt, was gut und was weniger gut gelaufen ist oder was sie/er noch nicht ganz verstanden hat.
2. Besprecht euch nun innerhalb der Gruppe. Notiert in das mittlere Feld, was ihr gemeinsam an der Gruppenarbeit gut und was weniger gut fandet und ganz besonders welche Fragen noch offen sind.

## M 8 Testen Sie Ihr Wissen!

1. Gartenkresse ist ein Kraut, das besonders schnell wächst.

In der Tabelle können Sie ablesen, wie groß die Kresse nach wie vielen Tagen ist:

| Alter [in d] | 1   | 2   | 3   | 5   | 8   | 10 | 12   |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|------|
| Höhe [in cm] | 0,5 | 0,7 | 1,2 | 3,7 | 7,5 | 10 | 13,5 |



Gartenkresse

© Thinkstock  
gram Publishing

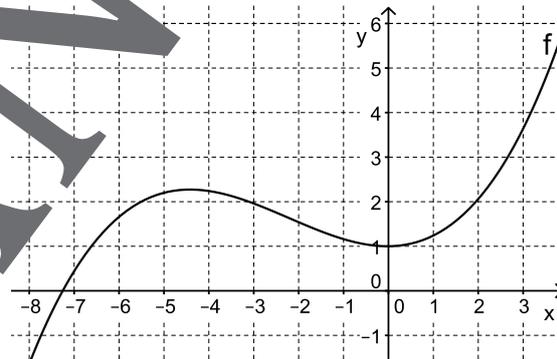
Bemerkung: [in d]  $\hat{=}$  in Tagen

- Bestimmen Sie das **durchschnittliche Wachstum** im gesamten Beobachtungszeitraum.
- Bestimmen Sie das durchschnittliche Wachstum zwischen dem zweiten und dem achten Tag.
- Bestimmen Sie, zwischen welchen Tagen die Kresse am schnellsten gewachsen ist.

2. Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der Funktion  $f$ .

- Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[-3 ; 0]$ .
- Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[0 ; 2]$ .
- Vergleichen Sie die beiden Werte miteinander.

Was fällt Ihnen dabei auf?



3. Gegeben sei die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x^3 + 4.$$

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den Intervallen  $[1; 3]$  und  $[-4; -1]$ .
- Begründe, dass der Differenzenquotient  $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ,  $h \neq 0$  nicht geeignet ist, die Steigung in nur einem einzigen Punkt zu berechnen.

Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie kurz.

- Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ mit } h \neq 0$$

beschreibt die Steigung zwischen zwei Punkten.

- Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Tangente an den Graphen an.

- Es gilt die Gleichung:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{-h} \text{ mit } h \neq 0.$$

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**