

I.C.60

Algebra

Das Rechnen mit Gleichungen vertiefen

Alessandro Totaro, Stuttgart

Illustriert von: Julia Lenzmann, Stuttgart und Liliane Oser, Hamburg



© RAABE 2019

Das Umformen von Gleichungen ist eine Grundkompetenz, die bis zum Abitur gebraucht wird. Terme bilden, Sachaufgaben lösen, binomische Formeln anwenden – all dies üben Ihre Schüler anhand von Praxisaufgaben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr: 7/8 (G8)

Dauer: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: 1. Gleichungen umformen und lösen; 2. Terme bilden und Sachaufgaben zuordnen; 3. Klammern auflösen; 4. Binomische Formeln anwenden; 5. Lösungsfälle zuordnen: eine Lösung, unendlich viele Lösungen, keine Lösung und quadratische Gleichung als Lösung

Thematische Bereiche: Gleichungslehre

Medien: Texte, PC

Zusatzmaterialien: differenzierendes Übungsmaterial mit vielen spielerischen Übungen

Didaktisch-methodische Hinweise

Der Umgang mit Gleichungen bereitet vielen Schülern große Schwierigkeiten und ist bis zur Klassenstufe 10 eine wichtige Grundfertigkeit, welche die Lernenden bereits möglichst früh in Klasse 5 und 6 festigen sollten. Es ist von enormer Bedeutung, dass die Schüler das Lösungsverfahren beim Umgang mit Gleichungen verinnerlichen. Erst danach können sie die nächste kognitive Stufe erreichen und mit Gleichungen modellieren, um mit deren Hilfe Alltagsprobleme zu lösen.

Um Gleichungen lösen zu können, sind jedoch Grundfertigkeiten beim **Rechnen mit Termen** eine wichtige Voraussetzung. Das Auflösen von Klammern, das Rechnen mit binomischen Formeln oder das Zusammenfassen von gleichwertigen Termen sind wichtiges Grundwissen, welches in dieser Einheit gestärkt und trainiert werden soll.

Worum geht es inhaltlich?

Mit dieser Übungseinheit festigen die Schüler ihre Fertigkeiten und Fähigkeiten im **Umgang mit Gleichungen**. Sie wenden wichtige Regeln und Gesetze an, die beim Umformen von Termen gelten. Die Lernenden wenden **Kommutativ-, Assoziativ- sowie Distributivgesetz** an und führen Äquivalenzumformungen durch, um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen.

Die Lösung mit einer **Probe** zu überprüfen, ist eine wichtige Fertigkeit, welche die Lernenden in dieser Übungseinheit stabilisieren. So können sie selbstständig feststellen, ob ihre ermittelte Lösungszahl richtig ist oder nicht.

Die Übersetzung zwischen innermathematischer und außermathematischer Welt ist eine wichtige Fähigkeit, die die Schüler in dieser Übungseinheit vertiefen. Das **mathematische Modellieren** mithilfe von Gleichungen hilft ihnen, ein konkretes Problem besser lösen zu können.

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden sollten den Umgang mit Termen beherrschen. Das Zusammenfassen von Termen, das Auflösen von Klammern sowie das Rechnen mit binomischen Formeln sind wichtige Voraussetzungen, um Gleichungen lösen zu können. Die Äquivalenzumformungen sind nur mit diesem Vorwissen möglich. Daher sollten sie bei Schwierigkeiten eine kurze Wiederholung zum Umgang mit Termen durchführen.

Wie ist die Übungseinheit aufgebaut?

In Stunde 1 geht es darum, die **Punktprobe zu verstehen, durchzuführen und Gleichungen zu lösen (M 1)**. Das in 3 Niveaustufen differenzierte Arbeitsblatt **Gleichungen lösen – übe passend auf deinem Niveau (M 2)** gibt den Lernenden die Möglichkeit, Aufgaben zu Gleichungen auf verschieden hohem Niveau zu üben.

In Stunde 2 trainieren die Schüler das Lösungsverfahren zum Lösen von Gleichungen. Anhand des **Gleichungssalats (M 3)** werden sie spielerisch motiviert, die passenden Aufgabenteile von vier Gleichungen einander zuzuordnen. Das Arbeitsblatt **Das Mathe-Quiz – finde die Anzahl der Lösungen (M 4)** dient dazu, den Lernenden bewusst zu machen, dass nicht immer eine eindeutige Lösung bei Gleichungen vorhanden ist.

In den Stunden 3 und 4 verknüpfen die Lernenden das Thema Gleichungen mit Problemen aus dem Alltag. Das **Tandem zur Übersetzung (M 5)** stärkt die Grundfertigkeiten für das erfolgreiche mathematische Modellieren.



Auf einen Blick

1. Stunde

Thema:	Gleichungen und Probe – Grundfertigkeiten aufbauen
M 1 (Ab)	Ist die Lösung der Gleichung so richtig? – Tandembogen
M 2 (Ab)	Gleichungen lösen – übe passend auf deinem Niveau
Hausaufgabe:	Die Formeln für Gleichungen aus den Vorjahren wiederholen

2./3. Stunde

Thema:	Komplexere Gleichungen – Grundfertigkeiten festigen
M 3 (Sp)	Gleichungssalat – finde die Rechenwege zu den Gleichungen
M 4 (Ab)	Das Mathe-Quiz – finde die Anzahl der Lösungen

3./4. Stunde

Thema:	Modellieren mit Gleichungen – wir wenden Gleichungen an
M 5 (Ab)	Textaufgaben mit Gleichungen
M 6 (Ab)	Mein Gleichungs-Wörterbuch – Tandemlogen zu mathematischen Aussagen
M 7 (Ab)	Gleichungs-Memory – Finde die passenden Paare!

5./6. Stunde

Thema:	Gleichungen im Schulalltag – Projekte erfolgreich meistern
M 8 (Ab)	Lohnt sich unser Getränkestand? – Kosten und Umsatz
M 9 (Ab)	Unsere Schulzeitung wird gedruckt! – Angebote vergleichen

7./8. Stunde

Thema:	Lernkontrolle
M 10 (Lk)	Fit für den Test? – Gemischte Aufgaben zum Umgang mit Gleichungen
M 11 (Tx)	Erste-Hilfe-Karten – Gleichungen umformen und lösen (Zusatzmaterial)

Legende der Abkürzungen

Ab: Arbeitsblatt; Lk: Lernstandskontrolle; Sp: Spiel; Tx: Text

Ist die Lösung der Gleichung so richtig? – Tandembogen

M 1

So geht's

1. Suche dir einen Partner. Faltet das Arbeitsblatt entlang der Mittellinie.
2. Partner B beginnt, löst die erste Aufgabe und nennt sein Ergebnis. Partner A kontrolliert das Ergebnis (grau) auf seiner Seite. Dann löst Partner A seine erste Aufgabe usw. Helft euch gegenseitig.



PARTNER A

Überprüfe, ob die angegebene Lösung richtig ist. Dein Partner kontrolliert dich.



PARTNER B

Überprüfe, ob die angegebene Lösung richtig ist. Dein Partner kontrolliert dich.

richtig, da: $3 \cdot 2 + 4 = ?$
 $6 + 4 = 10 \Rightarrow x = 2 \checkmark$

$3 \cdot x + 4 = 10 \Rightarrow x = 2$

$4 \cdot x + 2 = 45 \Rightarrow x = 10$

falsch, da: $4 \cdot 10 + 2 = ?$
 $40 + 2 = 42 \neq 45$

richtig, da: $3 \cdot 5 - 14 = ?$
 $15 - 14 = 1 \Rightarrow x = 5 \checkmark$

$3 \cdot x - 14 = 1 \Rightarrow x = 5$

$2 \cdot x + 18 = 26 \Rightarrow x = 8$

falsch, da: $2 \cdot 8 + 18 = ?$
 $16 + 18 = 34 \neq 26$

richtig, da: $(1 - 5) \cdot 2 = ?$
 $(-4) \cdot 2 = -8 \Rightarrow x = 1 \checkmark$

$(x - 5) \cdot 2 = -8 \Rightarrow x = 1$

$(x + 11) \cdot 2 = -4 \Rightarrow x = -13$

richtig, da: $(-13 + 11) \cdot 2 = ?$
 $(-2) \cdot 2 = -4 \Rightarrow x = -13 \checkmark$

falsch, da: $(7 + 2)^2 = ?$
 $9^2 = 81 \neq 49$

$(x + 2)^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

$(x - 4)^2 = 1 \Rightarrow x = 3$

richtig, da: $(3 - 4)^2 = ?$
 $(-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 3 \checkmark$

richtig, da: $(3 - 2) \cdot (3 + 4) = ?$
 $1 \cdot 7 = 7 \Rightarrow x = 3 \checkmark$

$(x - 2) \cdot (x + 4) = 7 \Rightarrow x = 3$

$(x + 5) \cdot (x - 8) = 40 \Rightarrow x = 3$

falsch, da: $(3 + 5) \cdot (3 - 8) = ?$
 $8 \cdot (-5) = -40 \neq 40$

Textaufgaben mit Gleichungen

M 5

So geht's: Du bist Partner A.

1. Suche dir einen Partner B.
2. Löse deine Aufgaben. Helft euch gegenseitig, wenn ihr nicht weiterkommt.
3. Vergleicht eure Ergebnisse. Teilweise ist deine Lösung die Aufgabe deines Partners und umgekehrt.

Aufgabe 1

Daniel und Sofia planen eine Kino-Schulaktion. Sie geben für Popcorn und Getränke insgesamt 65,00 € aus. Sie überlegen sich, wie sie die Eintrittskarten verkaufen sollen.



Ich würde für eine Eintrittskarte mit Popcorn und Getränk 2,50 € nehmen.



Ich finde das zu wenig. Nehmen wir lieber für eine Eintrittskarte mit Popcorn und Getränk 3,20 €.

Daniel

Sofia

Foto links: Thinkstock/photoobjects.net; rechts: www.colourbox.com

Wenn 80 Schüler kommen würden, wäre der Gewinn bei Daniels Vorschlag 175,00 € hoch.

- a) Stelle einen Term für den Gewinn auf. **Tipp** Gewinn = Einnahmen – Ausgaben
- b) Wie hoch wäre der Gewinn bei Sofias Vorschlag?

Aufgabe 2

Senad und Sandro vergleichen zwei Smartphone-LTE-Tarife von Lodafone.

Super-LTE-Tarif
zusätzliche Gebühren:
0,03 € pro MB

Nur: 10 € monatliche Grundgebühr

Sommer-LTE-Tarif
zusätzliche Gebühren:
0,12 € pro MB

Nur: 5 € monatliche Grundgebühr

- a) Die beiden überlegen, wie viel MB sie jeweils mit 30 € im Monat nutzen können. Sandro rechnet aus, dass man mit dem Supertarif 250 MB nutzen kann. Rechne du die Megabyte-Anzahl beim Sommer-Tarif aus.
- b) Welches Angebot sollte Senad wählen, wenn er 300 MB im Monat verbraucht?

Aufgabe 3

Deutschland-Tour
Busfahrt: 100 €
4 Tage (Vollpension)
Gesamtkosten: 193,20 €

Schul-Erlebnisreisen
Busfahrt: 90 €
5 Tage (Vollpension)
Gesamtkosten: 202,50 €

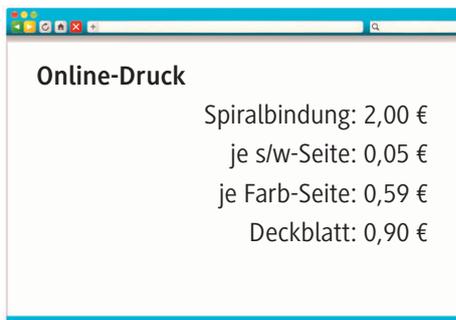


Foto: www.colourbox.com

Der Klassensprecher Hebung hat die Aufgabe, seiner Klasse Angebote für ein Schullandheim vorzustellen. Folgende Angebote von Reiseveranstaltern liegen vor: Bei Deutschland-Tour betragen die Kosten inklusive Vollpension 23,40 € pro Tag. Berechne die täglichen Kosten bei Schul-Erlebnisreisen. Wozu würdest du der Klasse raten?

M 9 Unsere Schulzeitung wird gedruckt! – Angebote vergleichen

Die Schulzeitung besteht aus 80 DIN-A4-Seiten. 70 Seiten werden schwarz-weiß gedruckt und 10 farbig. Ihr möchtet insgesamt 300 Schulzeitungen bestellen. Diese Angebote habt ihr gefunden.



Illustrationen von links nach rechts: Thinkstock/iStockphoto, www.colourbox.com, Thinkstock/Ingram Publishing

Aufgabe 1

Arbeite mit einem Partner zusammen. Ergänzt die Tabelle und entscheidet gemeinsam, welchen Shop ihr wählen würdet.

Druck-Shop			
Kosten pro Schulzeitung			

Aufgabe 2

Ihr entscheidet euch für den günstigsten Shop aus Aufgabe 1. Überlegt nun, wie teuer eine Schulzeitung sein sollte, um den Gewinn in der rechten Spalte zu erzielen.

Anzahl	Preis pro Schulzeitung	Kosten pro Schulzeitung	Gewinn
300			0 €
300			50 €
300			100 €
300			250 €

Aufgabe 3

Ihr habt euch für den günstigsten Shop entschieden. Berechnet den Gewinn, wenn ihr eine Schulzeitung für 12,00 € verkauft und ihr nur 280 der 300 bestellten Schulzeitungen verkauft.

Voransicht

M 11

Erste-Hilfe-Karten – Gleichungen umformen und lösen

Du weißt nicht, wie du eine Aufgabe zum Thema Gleichungen lösen kannst? Suche deine Frage in den Überschriften und lies dir das Beispiel durch!

Gib nicht auf und bleib dran!



<p>Erste-Hilfe-Karte I Wie löse ich eine Klammer auf?</p>	<p>Erste-Hilfe-Karte II Wie multipliziere ich zwei Klammern?</p>
<p>Multipliziere den Faktor mit jedem Summanden in der Klammer. Achte auf die Vorzeichen!</p> <p>Beispiel</p> $\begin{aligned} & (-2) \cdot (5 - 3x) \\ = & (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-3x) \\ = & -10 + 6x \end{aligned}$	<p>Jeder mit jedem! Multipliziere jeden Summanden der ersten mit jedem Summanden der zweiten Klammer.</p> <p>Beispiel</p> $\begin{aligned} & (3x + 2) \cdot (5x - 7) \\ = & 3x \cdot 5 + 2 \cdot 5x + 3x \cdot (-7) + 2 \cdot (-7) \\ = & 15x + 10x - 21x - 14 = 4x - 14 \end{aligned}$
<p>Erste-Hilfe-Karte III Wie lauten die drei binomischen Formeln?</p>	<p>I Erste-Hilfe-Karte IV Welche Lösungsfälle gibt es?</p>
<p>1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$</p> <p>2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$</p> <p>3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$</p>	<p>Fall 1: eine Lösung Beispiel für Endzeile: $x = 2$</p> <p>Fall 2: keine Lösung Beispiel für Endzeile: $3 = 2$</p> <p>Fall 3: unendlich viele Lösungen Beispiel für Endzeile: $7 = 7$</p> <p>Fall 4: noch nicht lösbar Beispiel für Endzeile: $x^2 + 3x = 5$</p>
<p>Erste-Hilfe-Karte V Wie löse ich eine Gleichung?</p>	<p>Erste-Hilfe-Karte VI Wie löse ich Textaufgaben?</p>
<p>Führe diese fünf Schritte nacheinander durch:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Löse alle Klammern auf. 2. Fasse zusammen, wenn möglich. 3. Bringe alle Variablen auf die linke Seite. 4. Bringe alle Zahlen auf die rechte Seite. 5. Dividiere durch den Faktor vor der Variablen. 	<p>Stelle dir diese Fragen:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Welche Zahlenangaben sind wichtig? 2. Welche Angaben sind von einer Größe abhängig? (zum Beispiel: von der Zeit, ...) 3. Welche Angabe ist gesucht? (Setze für die Größe die Variable x in der Gleichung ein.) 4. Was bedeutet das Ergebnis?

Lösungen

M 1 Ist die Lösung der Gleichung so richtig? – Tandembogen

Im **Tandembogen** trainieren die Lernenden, eine **Probe durchzuführen**. Dabei hat Partner A die Lösung von Partner B und umgekehrt. Durch diese Partnerarbeit üben die Schüler, selbstverantwortlich und kooperativ zu lernen. Sie automatisieren, ein Ergebnis wieder in die Ausgangsgleichung einzusetzen und so zu kontrollieren, ob sie die Aufgabe richtig gelöst haben.

Sollten die Lernenden nicht auf die richtige Lösung gekommen sein, üben sie das Suchen von Fehlern. Dabei kann der Partner helfen und gegebenenfalls in eigenen Worten erklären, wie die Aufgabe richtig gelöst wird. Durch das gegenseitige Erklären wird eine Begründungskultur gefördert, die den Schülern viele Vorteile bringt, denn erst durch das mathematische Argumentieren werden mathematische Inhalte nachhaltig gefestigt. Auch sind Erklärungen in Schülersprache sehr effektiv und führen zu mehr Erfolgserlebnissen. Geben Sie schwächeren Schülern den Tipp, die Probe auf einem Notizzettel schriftlich zu berechnen, falls das Kopfrechnen Probleme bereitet.

Hinweis

Empfehlen Sie den Lernenden, vor allem bei Tests eine Probe zu machen, um Fehler zu vermeiden. Lassen Sie Fehler in Rechenschritten berichtigen, um dies zu festigen.

Lösungen

Die Lösung steht immer beim Tandempartner.

M 2 Gleichungen lösen – übe passend auf deinem Niveau

Hier trainieren die Lernenden den **Umgang mit Gleichungen auf drei Niveaustufen**. In jeder Stufe rechnen die Lernenden in Aufgabe 1 mit einfachen Gleichungen. In Aufgabe 2 lösen sie Terme, in denen auch Klammern vorkommen. Mit ansteigender Niveaustufe werden die Aufgaben mathematisch komplexer, sodass bei Niveau 3 negative Faktoren vor den Klammern auftreten. Außerdem multiplizieren die Lernenden zwei Klammern miteinander, sodass sie das Distributivgesetz anwenden. Auf Niveau 2 wenden die Schüler zudem die binomischen Formeln an, um die Aufgaben erfolgreich zu meistern.

Es ist von großer Bedeutung, dass jeder Lernende **auf dem passenden Niveau arbeitet**. Auf diese Weise gelingt es Ihnen, eine positive Lernatmosphäre zu schaffen, in der die Schüler Erfolge erleben und sich so für den Mathematik-Unterricht begeistern können.

Tipp

Motivieren Sie Lernende, die zu leichte Aufgaben wählen, ein schwierigeres Niveau zu bearbeiten, damit ihre Fähigkeiten optimal gefordert werden.

Die **Lösungen** können die Lernenden gegenseitig in einem **Lerntempoduett** kontrollieren. Dabei setzen sich Schüler, die zeitgleich fertig werden und das gleiche Niveau bearbeiten, zusammen und kontrollieren ihre Lösungen. Haben sie unterschiedliche Lösungen, rechnen sie die Aufgabe gemeinsam nach.

