

II.B.22

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Parameterdarstellung von Geraden im \mathbb{R}^2 – Computerspiele mathematisch betrachtet

Ein Beitrag von Johann-Georg Vogelhuber



© heshphoto/Image Source

In der Entwicklung von Computerspielen bilden Vektoren das Grundgerüst für die Grafik und die Beschreibung von Bewegungen. Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler ausgehend von diesem Anwendungsbeispiel im Unterricht Grundkonzepte wie die vektorielle Parameterdarstellung von Geraden anschaulich und rechtsbezugsgerecht erarbeiten und vertiefen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: Sek. II

Dauer: 2 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)

Inhalte: Parameterdarstellung, Geraden, Vektoren, Länge von Vektoren

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Tk = Tipp-Karten, Tx = Info-Text

Einstieg

M 1 (Tx) Eine Neuauflage des Videospiekklassikers Pong

Erarbeitung

M 2 (Ab) Analysefragen und Arbeitsauftrag

M 3 (Tk) Tipp-Karten



Ergebnissicherung

M 4 (Ab) Lernprotokoll zu Geradengleichungen

Übung

M 5 (Ab) Mithilfe der Geradengleichungen Snooker-Weltmeister

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 11.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann können Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 (Ab) Neuauflage des Videospiekklassikers Pong

M 2 (Ab) Analysefragen und Arbeitsauftrag

M 3 (Tk) Tipp-Karten

M 1

Einstieg: Eine Neuauflage des Videospielesklassikers Pong

Das zu Beginn der 1970er-Jahre von Atari veröffentlichte Videospiel Pong gilt als Urvater der Videospiele und wurde zunächst auf Geräten in Spielhallen gespielt. Zwar war es nicht das erste Videospiel, dennoch war es das erste, das weltweit erfolgreich wurde.

Die Spielregeln

Das Spielprinzip von Pong ist sehr einfach gehalten und ähnlich zu Tischtennis: Ein Ball, dargestellt als Bildpunkt, bewegt sich geradlinig auf dem Bildschirm hin und her. Jeder der zwei Spieler hat einen „Schläger“, den er nach oben oder unten bewegen kann.

Den Schläger muss man dabei so bewegen, dass der Ball dort abprallt und wieder zum Gegner zurückgespielt wird. Verpasst man den Ball und lässt ihn am Schläger vorbeiziehen, so erhält der Gegner einen Punkt.

Trifft der Ball auf den Schläger bzw. auf den oberen oder unteren Bildschirmrand, so prallt er von diesem Hindernis ab. Die Geschwindigkeit wird dabei beibehalten und die Richtung verändert sich so, dass sich der Ball wieder vom Hindernis weg bewegt. Der „Auftreffswinkel“ gleich dem „Abprallwinkel“ sein.

Situationsbeschreibung

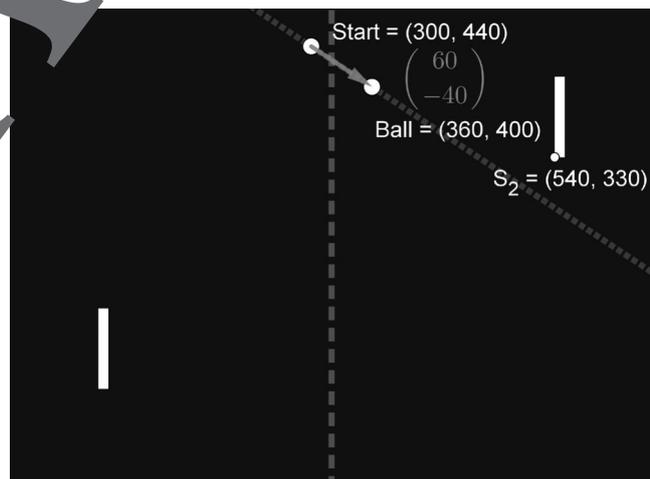
Dieses Videospiel Pong soll als innovative Handy-App neu entwickelt werden. Dafür muss neben den Spielregeln und der Steuerung auch eine „künstliche Intelligenz“ entwickelt werden, sodass man auch gegen einen virtuellen Gegner spielen kann. Dieser virtuelle Gegner muss die Flugbahn des Balls berechnen können und die Position ermitteln, zu der er seinen Schläger bewegen muss, sodass er den Ball trifft.

Als Vorüberlegung sollen für eine konkrete Spielsituation die Flugbahn des Balls sowie der Auftreffpunkt auf den rechten Schläger berechnet werden.

Der Ball befindet sich in diesem Fall im Punkt S_1 (360 | 400) und bewegt sich pro Sekunde insgesamt um 60 Pixel nach rechts und -40 Pixel nach unten. Die obere rechte Ecke des Schlägers befindet sich im Punkt S_2 (540 | 330). Dabei hat der Schläger eine Höhe von 80 Pixel.



© Owltom at German Wikipedia / Wikimedia commons/CC-BY-SA-3.0



Grafik: Johann-Georg Vogelhüber

M 3

Tipp-Karten



Tipp 1

Notieren Sie die aktuelle Position des Balls als Ortsvektor.

Welchen Vektor müssen Sie addieren, um die Position nach einer Sekunde zu berechnen?

Welchen Vektor müssen Sie addieren, um die Position nach einer halben Sekunde zu berechnen?

Welchen Vektor müssen Sie addieren, um die Position nach 0,8 Sekunden zu berechnen?



Tipp 2

Stellen Sie eine Formel für die Position des Balls nach t Sekunden auf. Die Überlegungen von Tipp 1 helfen Ihnen dabei. Falls Sie Probleme haben, die Formel aufzustellen, dann wenden Sie sich auf dem nächsten Tipp-Kärtchen die Zwischenlösung an.



Zwischenlösung zu Tipp 2

(nur umdrehen, wenn Sie nicht auf die Lösung kommen)

Nach wieviel Sekunden hat der Ball dann die Höhe des Schlägers ($x=540$) erreicht?

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 60 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 + 440t \\ 60 - 40t \end{pmatrix}$$

Und nach t Sekunden:

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 60 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 360 \end{pmatrix}$$

Und nach zwei Sekunden:

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 60 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Ball an der Position:

Strecke des Vektors \vec{v} in einer Sekunde zurück. Das heißt, nach einer Sekunde hat er

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 440 \\ -40 \end{pmatrix} \cdot 1 \text{ s} = \begin{pmatrix} 440 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Die Position des Balls hängt von der Zeit, dem Startpunkt und der Richtung ab.



Tipp 3

Überlegen Sie, welche x -Koordinate die Oberfläche des rechten Schlägers hat und nach welcher Zeit der Ball diese x -Koordinate erreicht hat.

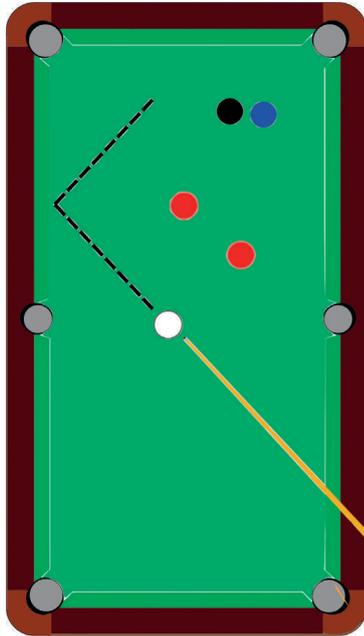


Tipp 4

Wenn Sie den Zeitpunkt kennen, an dem der Ball die x -Koordinate des Schlägers erreicht hat, dann können Sie dazu die y -Koordinate ausrechnen.

M 5

Übung: Mithilfe der Geradengleichung zum Snooker-Weltmeister



Grafik: Johann-Georg Vogelhuber

In dem entscheidenden Match der Snooker-Weltmeisterschaft muss der Herausforderer mit dem nächsten Stoß die weiße Kugel so spielen, dass diese die blaue Kugel trifft. Nur so hat er noch eine Chance, den Titel zu ergattern.

Die untere linke Tasche des Tisches entspricht dem Ursprung des Koordinatensystems. Die linke Bande hat damit die Koordinate $x = 0$. Die obere Bande liegt bei $y = 25,4$. Die weiße Kugel hat die Koordinaten $A(6 | 12)$ und wird in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gestoßen.

Aufgabe 1

Berechnen Sie, ob die weiße Kugel die blaue Kugel an der Position $B(10 | 22)$ trifft.

Fertigen Sie für Ihre Lösung auch eine maßstabsgetreue **Skizze an**. Alle Koordinaten im Text sind in dm angegeben.

Tipp

Beim Abprallen von der Bande ändert sich bei einer Koordinate des Richtungsvektors das Vorzeichen. Trifft die Kugel auf die linke Bande, so ändert sich das Vorzeichen der x -Koordinate von Minus nach Plus. Trifft die Kugel auf die obere Bande, so ändert die y -Koordinate ihr Vorzeichen.

Zur Kontrolle Ihrer Zwischenergebnisse können Sie mit den beiden QR-Codes die Koordinaten für die beiden Punkte aufrufen, von denen die Kugel an der Bande abprallt

Koordinaten 1. Punkt:



Koordinaten 2. Punkt:

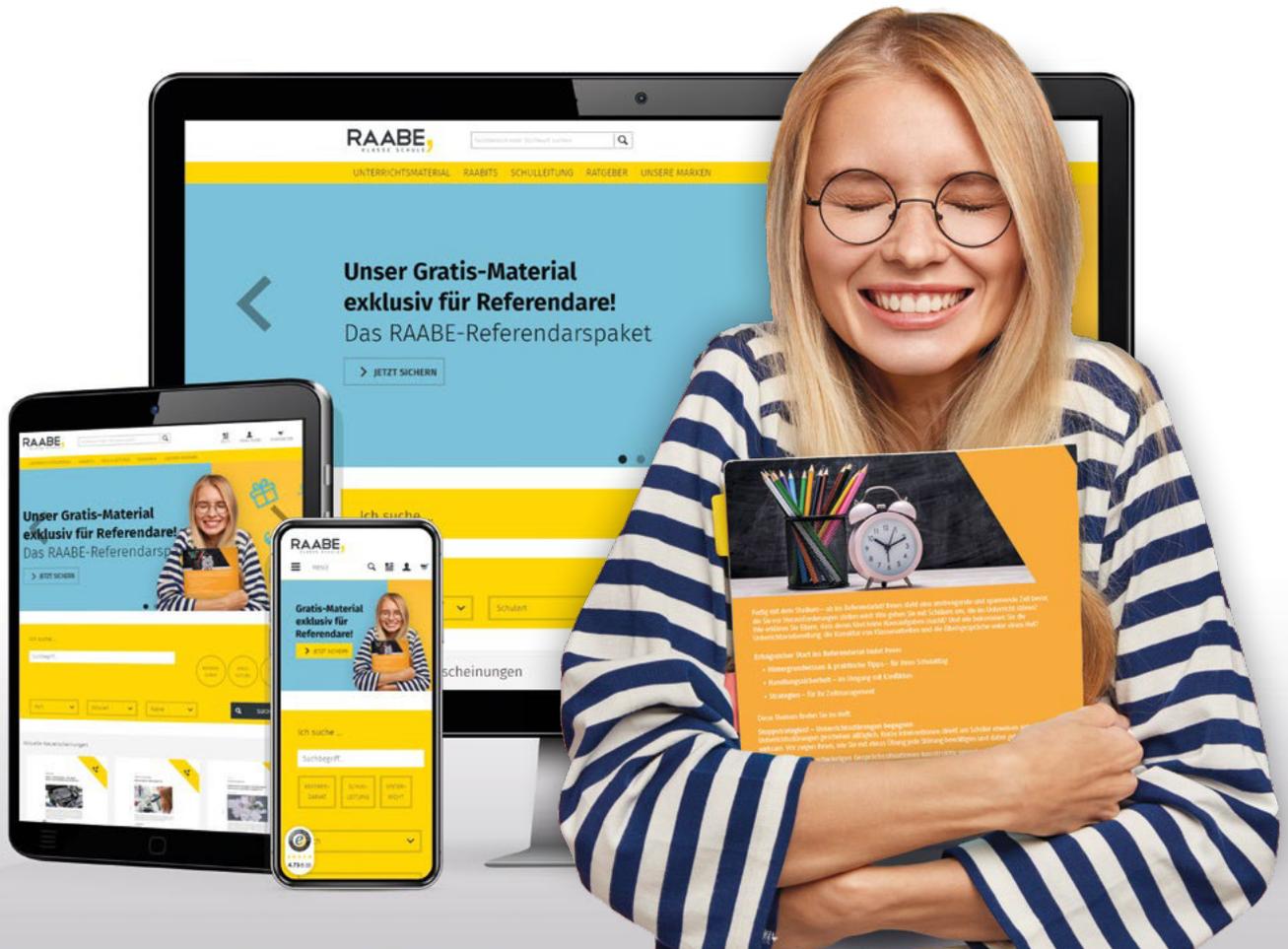


Aufgabe 2

Die weiße Kugel verfehlt die blaue Kugel nur knapp. Dabei bleibt sie am Punkt $C(10,5 | 22,3)$ liegen. Welche Strecke hat die weiße Kugel insgesamt zurückgelegt? **Berechnen** Sie.

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 4.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Sichere Zahlung per Rechnung,
PayPal & Kreditkarte



Exklusive Vorteile für Abonnent*innen

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



Käuferschutz mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de