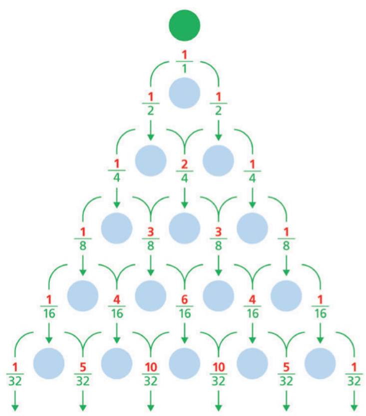
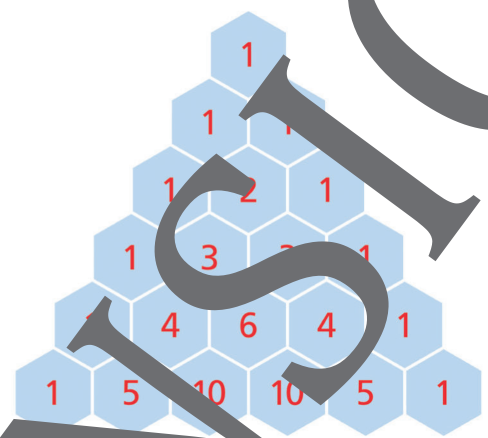
Stochastik

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung – Die Binomialverteilung begreifen und beherrschen

Ein Beitrag von Udo Mühlenfeld





© PeterHermesFurian/iStock/Getty Images Plus

Pünktlichkeit von Zügen, Abstimmungen bei Wahlen und Auswertungen fehlerhafter Produkte sind nur einige Kontexte, die sich durch die Binomialverteilung mathematisch modellieren lassen. Mithilfe dieses Beitrages können sich die Lernenden eigenständig mit vielfältigen Aspekten der Binomialverteilung auseinandersetzen, um die grundlegenden Eigenschaften verstehensorientiert, experimentell und theoretisch unter Einbeziehung digitaler Medien zu erfassen. Im Stationenlernen oder als Lerntheke werden durch das Material Differenzierungsmöglichkeiten eröffnet und die Lernenden individuell gefördert.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	[illegible] Unterrichtsstunden (Minimalplan 3)
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematisch kommunizieren (K6)
Inhalt:	Binomialverteilung, Zufallsgrößen, Bernoulli-Ketten, Simulation von Zufallsprozessen, Sigmaregeln, kumulierte Binomialverteilung, Formel von Bernoulli
Medien:	GTR, GeoGebra, Onlinerechner

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Lek = Lernerfolgskontrolle; Da = Datenauswertung
Planung für 3–4 Stunden

Station 1

M 1 (Ab) Wiederholung der Grundbegriffe – Theorie

Station 2

M 2 (Ab, Lek) Kammrätsel zu den Grundbegriffen

Station 3

M 3 (Ab) Wahrscheinlichkeiten berechnen

Station 4

M 4 (Ab, Da) Experimente durchführen und auswerten

Station 5

M 5 (Ab, Da) Simulationen – eigene Simulationen erstellen

Station 6

M 6 [illegible] Erwartungswert und Standardabweichung

Station 7

M 7 (Ab) Anwendungen

Station 8

M 8 (Ab, Da) Problemlösen

Station 4: Experimente durchführen und auswerten

M 4

Aufgabe 1 – Werfen einer Münze

Werfen Sie eine Münze fünfzigmal und **notieren** Sie, wie oft die Seite mit der Zahl oben liegt. Alternativ: **Rechnen** Sie mit 23-mal Zahl.

a) **Erläutern** Sie, warum es sich um eine Bernoulli-Kette handelt, und geben Sie die Werte für p, n und k an.

b) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit für die von Ihnen beobachtete Anzahl von Ergebnissen, bei denen die Zahl oben liegt.

c) **Geben** Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches, möglichst kleines Intervall **an**, das die von Ihnen beobachtete Anzahl enthält, und **bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferzahl in diesem Intervall liegt.

Aufgabe 2 – Werfen zweier Münzen

Werfen Sie gleichzeitig zwei Münzen fünfzigmal und **notieren** Sie, wie oft bei beiden Münzen die Seite mit der Zahl oben liegt.
Alternativ: **Rechnen** Sie mit 15-mal.
Wiederholen Sie die Teilaufgaben a) bis c) von Aufgabe 1.

Aufgabe 3 – Einen Würfel werfen

Planen Sie mit dem Zufallsgerät Würfel ein Bernoulli-Experiment, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit p nicht 0,5 beträgt. **Werfen** Sie den Würfel anschließend 60-mal.

Alternativ: **Rechnen** Sie mit 8 Treffern bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$.

Bearbeiten Sie dann die Teilaufgaben a) bis c) von Aufgabe 1.

Aufgabe 4 – Das Galton-Brett

a) **Bauen** Sie mit Streichhölzern und Plättchen oder Münzen ein Galton-Brett (s. Abbildung).

b) **Bewegen** Sie nacheinander 20 Spielfiguren (alternativ eine und notieren Sie jeweils den Behälter) über die Plättchen in die Auffangbehälter, wobei Sie an den Weggabelungen den Würfel als Zufallsgerät einsetzen.

c) **Vergleichen** Sie die Verteilung der Spielfiguren in den Auffangbehältern mit der theoretischen Verteilung.

d) **Begründen** Sie anschaulich, warum in den beiden äußeren Auffangbehältern relativ wenige Figuren erwartet werden.

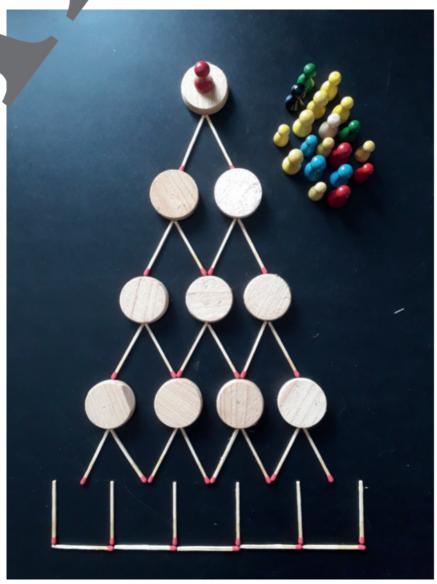


Foto: Udo Mühlenfeld

M 5

Station 5: Simulationen – eigene Simulationen erstellen

Aufgabe 1 – Einhundertmal eine Münze werfen

Erzeugen Sie zunächst in einer Spalte der Tabellenkalkulation eine Folge von 100 ganzzahligen Zufallszahlen zwischen 0 (entsprechend „Symbol oben") und 1 (entsprechend „Zahl oben") und bilden Sie dann die Summe. Diese gibt die Anzahl von „Zahl oben" an.

a) **Führen** Sie das Experiment zehnmal durch und **notieren** Sie sich die Ergebnisse.

b) **Geben** Sie das kleinstmögliche Intervall **an**, in dem Ihre 10 Ergebnisse liegen.

c) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Einsen in diesem Intervall liegt.

Hinweis
Verwenden Sie für die Simulation folgende Befehle: Bei **TI-NSpire CX** die Befehle =**randint(0,1,100)** und =**sum(A1:A100)** (Tabellenk.) Bei **CASIO FX-CG50** die Befehle **RanInt#(0,1,100)** und **Sum List A**[illegible]-Matri[illegible] Bei **Excel** die Befehle =**GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*2)** und =**SUMME(A1:A100)**

Aufgabe 2 – Einhundertmal zwei Münzen werfen

Erzeugen Sie zunächst eine Simulation, die das einhundertmalige Werfen zweier Münzen simuliert. Zeigen beide Münzen oben „Zahl", soll dies als Treffer gelten. **Passen** Sie die bei Aufgabe 1 gegebenen Hinweise dazu situationsgerecht an. Zum automatischen Zählen der Treffer kann es sinnvoll sein, die Zufallszahl „1" als Treffer anzusehen.

Hinweis
Bei **Excel** zählt der Befehl =**ZÄHLENWENN(Bereich;1)** die Einsen im angegebenen Zellenbereich. Bei **TI-NSpire CX** lautet der Befehl [illegible]**1=1,1,0)**. Bei **CASIO FX-CG50** werten Sie die Höhe der Säulen im Histogramm aus. **Bearbeiten** Sie die Teilaufgaben a) bis c) aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3 – Fertige Simulationen verwenden

Auf der Seite [illegible]://raabe.click/eSc9Th finden Sie eine Simulation zur Binomialverteilung mithilfe von GeoGebra.

a) **Führen** Sie die Simulation fünfmal durch und **ermitteln** Sie für p = 0,2 die Anzahlen folgender Ereignisse:
- keine Antwort richtig,
- höchstens zwei Antworten richtig,
- mindestens zwei Antworten richtig,
- mehr als drei Antworten richtig.

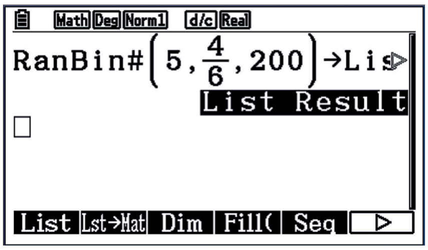
b) **Berechnen** Sie die theoretisch erwarteten Anzahlen und **vergleichen** Sie diese mit der Simulation.

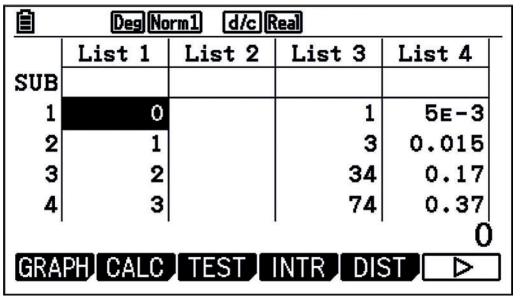
Station 8: Problemlösen

M 8

Aufgabe 1 – Bernoulli-Kette als Ziehen mit Zurücklegen im Urnenmodell

a) **Beschreiben** Sie, welches Urnen-Experiment mit dem GTR simuliert wurde.



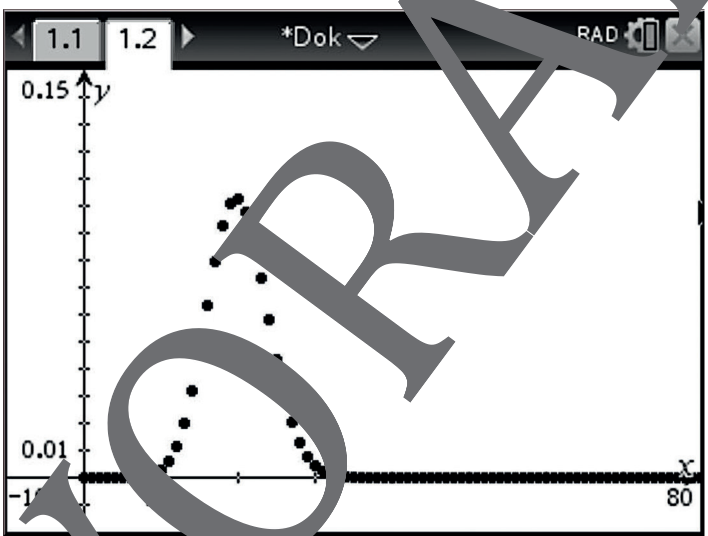


b) **Erläutern** Sie die Bedeutung der Werte in den Listen 3 und 4.

c) **Ermitteln** Sie die theoretisch zu erwartenden Häufigkeiten mithilfe der Binomialverteilung.

Aufgabe 2 – Von der Binomialverteilung zum Zufallsexperiment

Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment, das zu der unten abgebildeten Binomialverteilung passen kann.



Grafik: Udo Mühlenfeld