## Analysis

# Die Entdeckung der eulerschen Zahl – Eine selbstgesteuerte Herleitung im Unterricht

Marc Eßer

© MidSummerDay/iStock/Getty Images Plus

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. Oftmals stehen Rechenverfahren und deren Anwendung zu sehr im Vordergrund. In diesem Beitrag wird das Verständnis der Herleitung der Zahl *e*, das damit verbundene Erkenntnisinteresse der Einführung der eulerschen Zahl in die Mathematik und die besonderen Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten in der Differentialrechnung von *e*-Funktionen gefördert und kann durch die detaillierte Betrachtung der Herleitung vertieft und nachhaltiger gelernt werden.

**KOMPETENZPROFIL**

| | |
|---|---|
| **Klassenstufe:** | Sek. II |
| **Dauer:** | 3 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2) |
| **Inhalt:** | eulersche Zahl, e-Funktionen differenzieren |
| **Kompetenzen:** | mathematisch argumentieren (K1), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) |

# Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Mb = Merkblatt
Planung für 3 Stunden

## Einstieg

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Grundlagen: Exponentialfunktion – Operationen und Ableitung** |
| **M 1 (Ab)** | Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren |
| **M 2 (Ab)** | Ableitungen von Exponentialfunktionen zuordnen |

## Erarbeitung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Die Herleitung der Zahl *e*** |
| **M 3a (Ab)** | Schritt 1: Die Ableitung einer einfachen Exponentialfunktion herleiten |
| **M 3b (Ab)** | Schritt 2: Die Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion herleiten |
| **M 3c (Ab)** | Schritt 3: Die Entdeckung von *e* |

## Ergebnissicherung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Folgerungen nach Einführung der eulerschen Zahl** |
| **M 4 (Mb)** | Definitionen und Folgerungen im Zusammenhang mit der Zahl *e* |

## Übung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Wissen zur *e*-Funktion anwenden** |
| **M 5 (Ab)** | *e*-Funktion – Anwenden, vertiefen, vernetzen |

## Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 14.

## Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

| | |
|---|---|
| **M 2 (Ab)** | Ableitungen von Exponentialfunktionen zuordnen |
| **M 3c (Ab)** | Schritt 3: Die Entdeckung von *e* |
| **M 5 (Ab)** | *e*-Funktion – Anwenden, vertiefen, vernetzen |

# Einstieg: Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren M 1

| Allgemeine Form Exponentialgleichung | $a^t = b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{Q}$. |
|---|---|

**Aufgabe**

**Finden** Sie sich in 3er Gruppen zusammen.

**Teilen** Sie die Abschnitte 1)–3) jeweils einem Gruppenmitglied **zu**.

**Bearbeiten** Sie die folgenden Aufgaben a)–f) für den Ihnen zugeordneten Abschnitt.

a) **Umkreisen** Sie den <u>gesuchten</u> Parameter der Aufgaben im Dreieck.

b) **Wählen** Sie die Gleichung und die zugehörige Frage **aus**, die zu Ihrem Aufgabentypen passen.

| | |
|---|---|
| Welche Zahl potenziert mit 4 ergibt 16? | $a^4 = 16$ |
| Mit welcher Zahl muss 2 potenziert werden, um 16 zu erhalten? | $2^4 = b$ |
| Was ergibt 2 potenziert mit 4? | $2^t = 16$ |

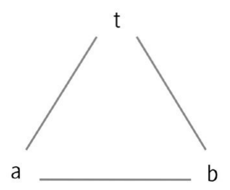
c) **Lösen** Sie die Gleichungen.

d) **Notieren** Sie auf die Linie des Dreiecks zwischen den beiden gegebenen Parametern die angewendete Operation zur Lösung der Gleichung: „potenzieren“, „logarithmieren“ oder „radizieren“.

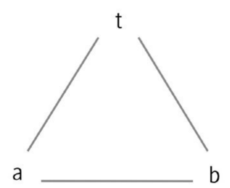
e) **Vergleichen** Sie mit den Fällen der anderen Gruppenmitglieder und **ergänzen** Sie Ihre Aufzeichnungen.

f) **Klären** Sie in der Gruppe gemeinsam, inwiefern das Dreieck beim Lösen der Gleichungen gedanklich unterstützt.

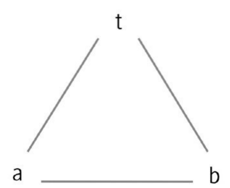
1) Aufgabentyp:

| | | |
|---|---|---|
| $2^3 = b$ | b = |  |
| $10^6 = b$ | b = | |
| $(\frac{1}{4})^4 = b$ | b = | |

2) Aufgabentyp:

| | | |
|---|---|---|
| $a^3 = 8$ | a = |  |
| $a^6 = 1\,000\,000$ | a = | |
| $a^4 = 256$ | a = | |

3) Aufgabentyp:

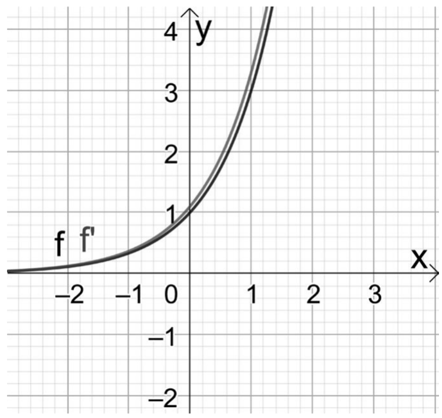
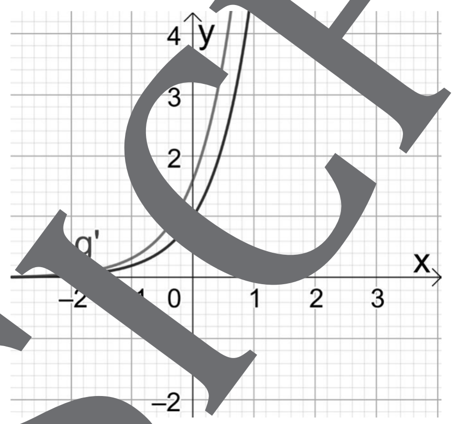
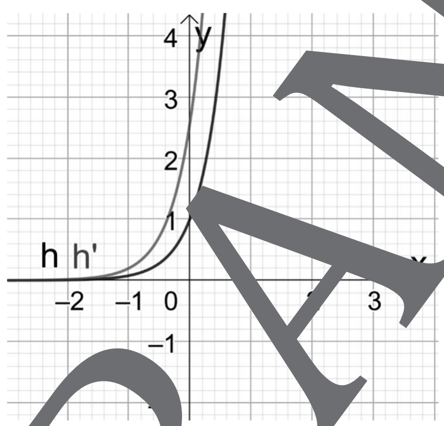
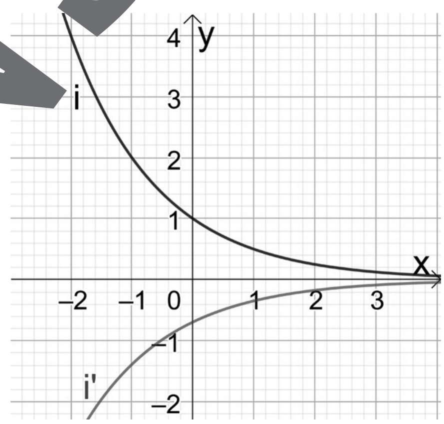
| | | |
|---|---|---|
| $2^t = 8$ | t = |  |
| $10^t = 1\,000\,000$ | t = | |
| $4^t = 256$ | t = | |

**M 2**

# Einstieg: Ableitungen der Exponentialfunktionen

**Aufgabe**

**Vergleichen** Sie den Funktionstyp der Ausgangsfunktionen mit ihrer Ableitung und **stellen** Sie Vermutungen zu möglichen Zusammenhängen **auf**.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)=3^x$ | $f'(x)=1{,}0986\cdot 3^x$ | $g(x)=5^x$ | $g'(x)=1{,}6094\cdot 5^x$ |
|  | |  | |
| $h(x)=13^x$ | $h'(x)=2{,}5649\cdot 13^x$ | $i(x)=0{,}5^x$ | $i'(x)=-0{,}6931\cdot 0{,}5^x$ |
|  | |  | |

**Vermutung formulieren:**

Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist eine ______________________

______________________

______________________

______________________

______________________

______________________

**Aufgabe 2: Die Berechnung der Ableitung**

Mit dem Zuwachs aus Aufgabe 1 wurde die **mittlere Änderungsrate** über einen ganzen Tag betrachtet. Also der Differenzenquotient:

$$m = \frac{2^{t+1} - 2^t}{(t+1) - t} = \frac{2^{t+1} - 2^t}{1}$$

Die Ableitung ist als **momentane Änderungsrate** definiert. Dafür wird die Zeitspanne möglichst unendlich klein gewählt, sodass die Änderung zu einem Zeitpunkt angegeben werden kann. Dies wird mit dem Differentialquotienten dargestellt:

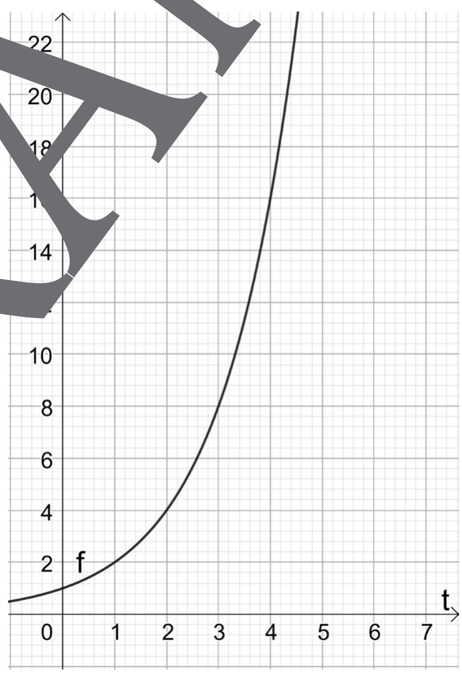
$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2^{t+h} - 2^t}{h}$$

**Berechnen** Sie die momentane Änderungsrate mithilfe des obigen Differentialquotienten und **notieren** Sie Ihre Ergebnisse in der Tabelle.

| t | Näherungsweise f'(t) für h = 0,01 | Näherungsweise f'(t) für h = 0,00001 | Gerundet auf drei Nachkommastellen |
|---|---|---|---|
| t = 1 | | | |
| t = 2 | | | |
| t = 3 | | | |
| t = 4 | | | |

**Aufgabe 3: Eine Vermutung aufstellen**

**Zeichnen** Sie den Graphen der Ableitung in das Koordinatensystem mithilfe der Tabelle aus Aufgabe 2 **ein** und **stellen** Sie eine Vermutung **auf**, welcher Funktionstyp der Graph der Ableitung ist.




| **Ergebnis formulieren:** |
|---|
| Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(t)$ ist eine ______________________________. |

# Erarbeitung: Woher stammt die Zahl *e*? M 3c

## Schritt 3: Die Entdeckung von *e*

**Aufgabe 1: Spezialfall erkennen – Die „richtige" Frage formulieren.**

a) **Öffnen** Sie die GeoGebra-Datei https://raabe.click/ggb-IIA44-M3cA1. **Vergleichen** Sie die verschiedenen Exponentialfunktionen und ihre Ableitungen, indem Sie den Schieberegler im GeoGebra-Applet verwenden. **Notieren** Sie die Ausgangsfunktion und die Ableitungsfunktion des Falles mit den außergewöhnlichen Eigenschaften, die Sie beobachten konnten, und **ergänzen** Sie die Frage:

| Wann ist die Proportionalitätskonstante gleich ______? |
|---|

b) **Beschreiben** Sie kurz, was dann aus der Gleichung $f'(t)=k\cdot f(t)$ folgt.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**Aufgabe 2: Die Auflösung**

Es wurde gezeigt, dass sich die Proportionalitätskonstante durch $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ berechnen lässt. Finden Sie mithilfe der Tabelle das $a$, für das nun gilt, dass die Proportionalitätskonstante gleich 1 ist. Das also gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$$

a) **Berechnen** Sie mit verschiedenen Werten für a die Proportionalitätskonstante, sodass diese möglichst exakt gleich 1 ist. Starten Sie dabei bei a = 2,7 und wählen Sie danach geschickt. **Notieren** Sie Ihre Ergebnisse in der Tabelle.

| a | 2,7 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ | | | | | | |

b) **Ergänzen** Sie:

Für a ≈ ___________ ist die Proportionalitätskonstante bis auf die _____________ Stelle hinter dem Komma genau 1. Um 1 noch exakter zu erhalten, müsste man diese Zahl um _____________________________ Nachkommastellen präzisieren. Die Zahl, die man dadurch erhält, ist eine irrationale reelle Zahl.
Sie wird nach dem Mathematiker Leonhard Euler eulersche Zahl, kurz: *e*, genannt.

## Übung und Vertiefung

**M 5**

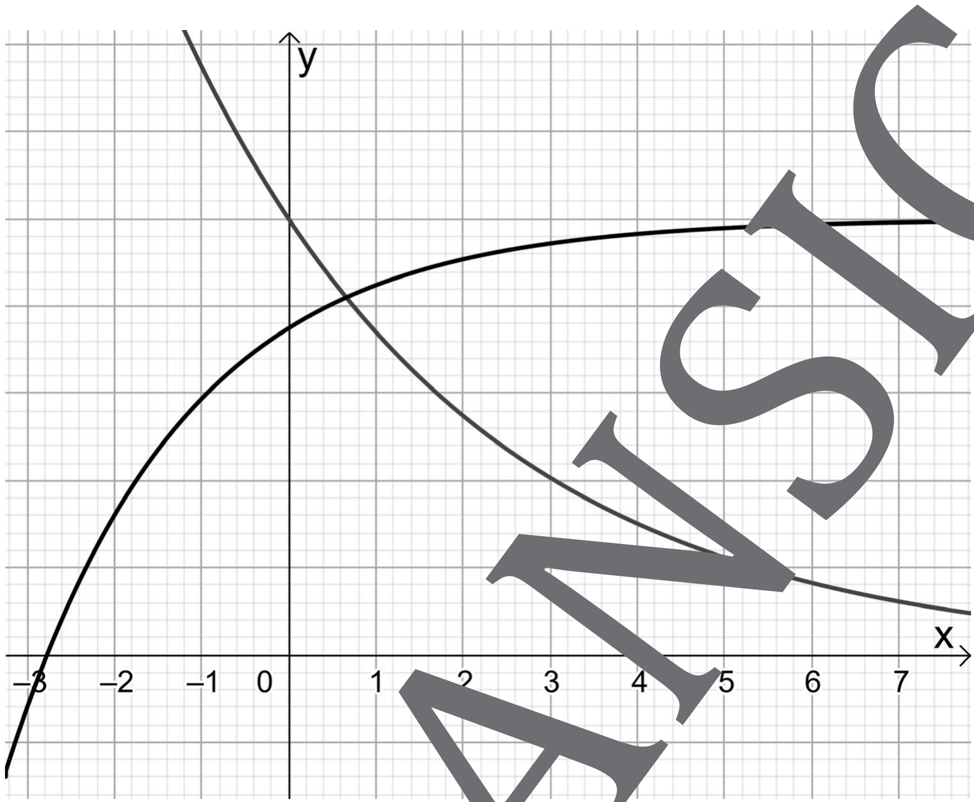
**Aufgabe 1**

Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) = 100 \cdot e^{-0{,}3x}$$

$$f_2(x) = 100 - 25e^{-0{,}5x}$$

**Ordnen** Sie den Graphen die passende Funktion **zu** und **skalieren** Sie die y-Achse.




**Aufgabe 2**

**Geben** Sie die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen **an**.

a) $f(x) = 18e^{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}e^{x}$ [illegible] $e^{x} - 4x$

**Aufgabe 3**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$.

a) **Skizzieren** Sie die Funktion.

b) **Entscheiden** Sie **begründet**, ob $g(x) = -e^{-x}$ oder $h(x) = e^{-x}$ die Ableitungsfunktion darstellt.