

## II.A.46

### Analysis

# Modellierung von Wachstumsvorgängen und Abbauprozessen – THC-Konzentration

Nach einer Idee von Mona Hitzenauer



© RAABE 2024

© Animaflo/istock/Getty Images Plus

Die Cannabis-Legalisierung in Deutschland ist durch die COVID-19-Pandemie ist das eigentlich mit dem THC-Abbau im Körper: Wie lange sollte man nach dem Konsum von Cannabis kein Auto fahren? In dieser Unterrichtseinheit lösen Ihre Klassen Problemstellungen im Sachkontext der THC-Konzentration, insbesondere im Rahmen der Modellierung von Wachstums- und Abklingvorgängen, und führt dabei unter anderem beliebige Exponentialfunktionen auf die natürliche Exponentialfunktion zurück. Gestalten Sie mit diesem Material Ihren Mathematikunterricht interessant und lebensnah.

---

#### KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11–13

Dauer: 7–4 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)  
Parabel, gebrochenrationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, abschnittsweise definierte Funktionen, Gleichungssysteme, Extremwertproblem, Ableitung, bestimmtes Integral, Transformation einer Funktion

---

# Auf einen Blick

Planung für 4 Stunden

## Einstieg

**M 1** THC-Abbau und -Grenzwert im Straßenverkehr

**Benötigt:**  OH-Projektor/Beamer/Elmo

## Erarbeitung

**M 2** Informationstext: THC-Aufnahme und -Abbau im Blut

**M 3** THC-Blutplasmakonzentrationskurve durch Inhalation

**M 4** THC-Blutplasmakonzentrationskurve durch Fehlinnahme

**M 5** THC-Grenzwert im Straßenverkehr

**M 6** Tippkarten zu den Materialien

## Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie hier.

## Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann lassen Sie die Materialien arbeitsteilig bearbeiten oder entlasten Sie die Präsenzzeit, indem Sie den Unterricht im Sinne eines flipped Classrooms gestalten. Planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden. Nutzen Sie in der ersten Stunde **M 1**, um die Motivation für die Unterrichtseinheit zu verdeutlichen und mögliche Fragen zu **M 2–M 5** zu klären. Lassen Sie diese dann zu Hause bearbeiten und besprechen Sie die Ergebnisse in der darauffolgenden Stunde.

## Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	einfaches Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	Zusatzaufgabe		Alternative		Selbsteinschätzung

## Einstieg: THC-Abbau und -Grenzwert im Straßenverkehr

M 1



„Die Abbaurrate von Alkohol in der Leber von Menschen sind unabhängig von der konsumierten Menge ca. 0,1 g Alkohol pro Kilogramm Körpergewicht in der Stunde (ca. 0,13 Promille).“<sup>1</sup>

**Aufgabe:**

**Beschreiben** Sie die Bilder und lesen Sie das Zitat.

**Formulieren** Sie Problemfragen, die sich daraus ergeben.

Wenn Sie möchten, können Sie sich die folgenden Videos ansehen, um die Problematik noch tiefergehend zu verstehen.

<https://raabe.click/alkohol-straßenverkehr>



<https://raabe.click/thc-straßenverkehr2>

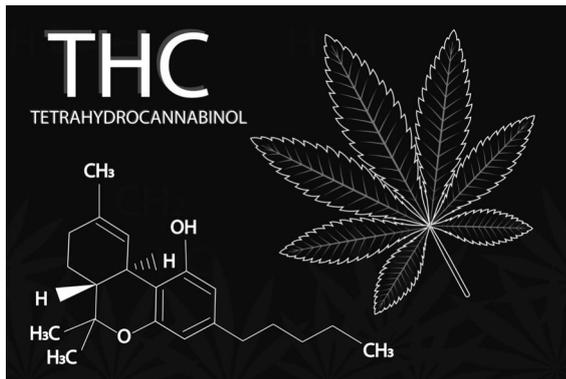


Bildquellen: © Anirudh/iStock/Getty Images Plus; © Ljupco/iStock/Getty Images Plus; © colourbox

1 TÜV-Süd: Alkoholabbau. Auf: <https://www.tuvsud.com/de-de/branchen/mobilitaet-und-automotive/fuehrerschein-und-pruefung/mpu-untersuchungen-bei-tuev-sued-life-service/drogen-und-alkohol-im-straassenverkehr/alkoholabbau> [letzter Abruf: 16.04.2024]

M 2

Informationstext: THC-Aufnahme und -Abbau im Blut



$\Delta^9$ -*trans*-Tetrahydrocannabinol (THC) ist die psychoaktive Hauptsubstanz von Cannabis. Sie beeinflusst z. B. das Verhalten, die Schmerzwahrnehmung und den Appetit, kann entzündungshemmend wirken und Übelkeit bekämpfen. Außerdem ist sie auch eine der Substanzen, die abhängig machen können.<sup>2</sup>

Das Abhängigkeitspotenzial einer Droge wird umso größer, je schneller die aktiven Bestandteile das Blut bzw. Gehirn erreichen.<sup>3</sup> Bei der Aufnahme von THC aus Cannabisprodukten gibt es hier deutliche Unterschiede: Bei der Inhalation (durch Rauchen oder Vaporisieren) gelangt THC über die Lunge sehr viel schneller ins Blut als bei der oralen Einnahme (essen).<sup>4</sup>



Die folgende Tabelle zeigt die ungefähren Mittelwerte der Blutplasmakonzentrationen von THC in ng/ml über die Zeit  $t$  in Stunden von 100 Studienteilnehmenden während und nach dem Rauchen einer cannabishaltigen Zigarette (aka Joint) mit ca. 15,8 mg THC:

$t$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,17	0,25	0,4	0,75	1,25	1,6	2,25	2,5
$P$	0	9	22	33	41	60	70	79	80	79	72	53	39,5	28	11	6	4,5	2,9	2



In der zweiten Tabelle sehen Sie die ungefähren Mittelwerte für die Blutplasmakonzentrationen bei einer oralen Einnahme von ca. 20 mg THC über eine Gelatine-Kapsel:

$t$	0	0,5	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	6
$P$	0	1	4	5	6	5	4	7	6,5	6,25	7	9

Anmerkung: Die Tabellendaten stammen aus den Diagrammen der Studienzusammenfassungen unter Fußnoten 2, 3 und 4.

Quellen: © Eugene B-sov/iStock/Getty Images Plus; © 24K-Production/iStock/Getty Images Plus; © Charles Wollertz/iStock/Getty Images Plus

2 Poyatos L, Pérez-Acevedo AP, et al. Oral Administration of Cannabis and  $\Delta$ -9-tetrahydrocannabinol (THC) Preparations: A Systematic Review. *Medicina (Kaunas)*. 2020 Jun 23;56(6):309. doi: 10.3390/medicina56060309. PMID: 32585912; PMCID: PMC7353904.

3 Samaha AN, Robinson TE. Why does the rapid delivery of drugs to the brain promote addiction? *Trends Pharmacol Sci*. 2005 Feb;26(2):82-7. doi: 10.1016/j.tips.2004.12.007. PMID: 15681025.

4 Dr. Martin Juneau. Edible cannabis: An effect of longer duration and less predictable than with inhalation, *Observatoire de la Prévention*, <https://observatoireprevention.org/en/2019/09/16/edible-cannabis-an-effect-of-longer-duration-and-less-predictable-than-with-inhalation/> [letzter Abruf: 16.04.2024]

## THC-Blutplasmakonzentrationskurve Inhalation

M 3



### Aufgabe 1 (Anstieg der Blutplasmakonzentration von THC)

**Untersuchen** Sie den Anstieg der Blutplasmakonzentrationen von THC bei der Inhalation mit einem digitalen Werkzeug Ihrer Wahl, z. B. einem Tabellenkalkulationsprogramm oder GeoGebra.

- Übernehmen Sie die relevanten Werte inkl. Maximum aus M 2 und erstellen Sie ein passendes Diagramm.
- Erläutern Sie, mit welcher Art von Funktion sich die Daten am besten angeben bzw. modellieren lassen.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm und Definitionsbereich der Modellfunktion.
- Zeigen Sie den Graphen Ihrer Modellfunktion im Diagramm aus a) an.

### Aufgabe 2 (Abfall der Blutplasmakonzentration von THC)

**Untersuchen** Sie nun den Abfall der Blutplasmakonzentration von THC. Nehmen Sie dazu die Daten aus der Tabelle in M 2 der Inhalation.

- Die Datenpunkte sollen nun mit einer Exponentialfunktion der Form

$$f_1(t) = a \cdot e^{bt} + c \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

und mit einer gebrochenrationalen Funktion der Form

$$f_2(t) = \frac{a}{(t+b)^2 + c} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

angenähert bzw. modelliert werden.

**Bestimmen** Sie jeweils mithilfe eines digitalen Werkzeugs Ihrer Wahl die Parameter auf zwei Nachkommastellen genau, wenn Sie das Maximum, Minimum und den Datenpunkt bei  $t = 0,75$  h heranziehen.

- Zeichnen Sie alle Datenpunkte und den jeweiligen Graphen der Modellfunktion für den Abfall der THC-Blutplasmakonzentration in ein Koordinatensystem.

**Erläutern** Sie, welcher Graph die Daten besser modelliert.

- Berechnen Sie jeweils die Fehlerquadratsumme mit der Formel

$$a = \sum_{k=1}^n (f(t_k) - p_k)^2 = (f(t_1) - p_1)^2 + (f(t_2) - p_2)^2 + \dots + (f(t_n) - p_n)^2$$

um zu entscheiden, welche die bessere Modellfunktion ist.

**Zeichnen** Sie den weiteren Verlauf des Abfalls bis Stunde sechs mithilfe der besseren Modellfunktion. Geben Sie den Wert der THC-Plasmakonzentration von  $t = 6$  an. **Vergleichen** Sie diesen Wert mit der schlechteren Modellfunktion.

Bildquellen: © 24K-Production/iStock/Getty Images Plus; © colourbox

## M 4

## THC-Blutplasmakonzentrationskurve orale Einnahme

**Aufgabe 1 (Anstieg der Blutplasmakonzentration von THC)**

Nun beschäftigen Sie sich mit der THC-Kurve nach der oralen Einnahme.

- a) **Modellieren** Sie den Anstieg bis einschließlich Stunde sechs mit einer Funktion der Form

$$f_1(t) = a \cdot \ln(t) + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

indem Sie die Punkte  $(1 | 4)$  und  $(6 | 9)$  der Tabelle aus M 2 nutzen.

**Berechnen** Sie die Parameter auf zwei Nachkommastellen genau.

**Geben** Sie den Funktionsterm und einen sinnvollen Definitionsbereich an.

- b) **Modellieren** Sie den Anstieg unter Verwendung des Datenpunktes  $(t_3 | P_3) = (1 | 4)$  und der Minimierung der Fehlersumme

$$E(a) = (f(t_6) - P_6)^2 + (f(t_{12}) - P_{12})^2$$

um den Wert für  $a$  zu bestimmen.

**Geben** Sie den Funktionsterm  $f_2(t)$  mit einem sinnvollen Definitionsbereich an.

- c) **Zeichnen** Sie die Datenpunkte und ihre Modellfunktion im Intervall  $[0; 6]$  in ein Koordinatensystem. **Verlängern** Sie die Zeitachse bis einschließlich zwölf Stunden, da dies für Aufgabe 2b) benötigt wird.

**Aufgabe 2 (Abfall der Blutplasmakonzentration von THC)**

Gehen Sie davon aus, dass der Abfall der THC-Blutplasmakonzentration bei der oralen Einnahme ähnlich verläuft, wie der Abfall bei der Inhalation und der Maximalwert bei Stunde sechs erreicht wurde.

- a) **Prognostizieren** Sie den Abfall der THC-Blutplasmakonzentration bei der oralen Einnahme bis Stunde zwölf, indem Sie die Modellfunktion

$$f(t) = \frac{2,1}{(t + 0,85)^2 - 0,65}$$

für den Abfall bei der Inhalation entsprechend stauchen/verschieben. Der Übergang von Ihrem Anstiegsglied (aus 1a) oder 1b) zum Abfallgraphen soll stetig erfolgen. Geben Sie den

Funktionsterm mit einem sinnvollen Definitionsbereich an.

- b) **Zeichnen** Sie Ihre Prognosefunktion in das Koordinatensystem unter 1c).

- c) **Berechnen** Sie die Gesamtmenge des THCs in  $\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$  bis Stunde zwölf mit einem digitalen Werkzeug Ihrer Wahl.

**Aufgabe 3**

**Verwenden** Sie die bisherigen Ergebnisse aus M 3 und M 4 und **stellen** Sie damit die abschnittsweise definierten Funktionsterme der Inhalation und oralen Einnahme (Anstieg und Abfall) **auf** und **zeichnen** Sie sie gemeinsam in ein Koordinatensystem.

Bildquellen: © Charles Wollertz/iStock/Getty Images Plus; © colourbox

## M 6



## Tippkarten zu den Materialien

Tippkarte zu M 3	
1a)	Der Diagrammtyp „XY-Punktediagramm“ eignet sich sehr gut.
1b)	Gesucht ist eine ganzrationale Funktion.
1c)	Lassen Sie sich eine „Trendlinie“ anzeigen. Anders als der Begriff vermuten lässt, ist diese nicht unbedingt eine Gerade. In GeoGebra gibt es den Befehl „TrendPoly(<Liste an Punkten>, <Grad des Polynoms>).
2a)	Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das Sie etwa mit einem CAS oder GeoGebra lösen können. Evtl. müssen Sie dafür auch bereits eine oder zwei Variablen (bzw. Parameter) eliminieren, um eine Gleichung mit einer Unbekannten zu erhalten.
2b)	Betrachten Sie die Abstände der Datenpunkte zum Graphen Ihrer Modellfunktion.
2c)	Die Datenpunkte aus der Tabelle in M 2 werden allgemein mit $(t_k, P_k)$ bezeichnet. Berechnen Sie die Fehlerquadratsumme aus allen Datenpunkten des Abfalls der Blutplasmakonzentration bei der Inhalation (siehe Maximalwert).

Tippkarte zu M 4	
1a)	Stellen Sie ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen auf, indem Sie die vorgegebenen Punkte in die allgemeine Gleichung der gesuchten Funktion einsetzen.
1b)	Bestimmen Sie zunächst über den dritten Punkt (1   4) in der Tabelle den Wert des Parameters $b$ .
2a)	Ihre Zielfunktion für den Abfall soll im Bereich $[6; 12]$ und durch den Punkt an der Stelle $t = 6$ ihrer Ansatzfunktion verlaufen. Nennen Sie drei Transformationen vor: Stauchen in $y$ -Richtung, Strecken in $x$ -Richtung und Verschiebung in $x$ -Richtung. Die Reihenfolge ist dabei egal. Stauchen in $y$ -Richtung: $a \cdot f(t)$ . Vergleichen Sie den Wert der Ursprungsfunktion an der Stelle 0,1 und den Zielwert an der Stelle 6. Strecken in $x$ -Richtung: $f(bt)$ . Die Ursprungsfunktion für den Abfall verläuft im Intervall $[0,1; 6]$ . Sie soll so gestreckt werden, sodass die Zielfunktion im Intervall $[6; 12]$ verläuft. Verschieben in $x$ -Richtung: $f(t \pm c)$ . Gemeinsame Transformation: $a \cdot f(b \cdot (t \pm c))$ .

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

