II.A.47

Analysis

Graphisches Ableiten – In Stationenarbeit Zusammenhänge erkunden

Nach einer Idee von Dr. Jürgen Leitz

© damircudic/E+

Bei der Kurvenuntersuchung liefern die drei Ableitungen einer Funktion Kriterien für notwendige und hinreichende Bedingungen zum Bestimmen markanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkt) und werden zur Verlaufsbestimmung des Graphen (Monotonie, Krümmungsverhalten) angewendet. Somit kann grob der Verlauf einer Funktion gezeichnet werden. Den Schwerpunkt dieser Unterrichtseinheit bildet das graphische Differenzieren. Lassen Sie Ihre Klasse Erkenntnisse sowohl im Plenum als auch in Einzelarbeit, Partnerarbeit und Gruppenarbeit erarbeiten und in Stationenarbeit vertieft üben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12
Dauer:	6 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)
Inhalt:	Ableitung, Ableitungsfunktion, Änderungsrate, Steigung, Funktionsgraph, Extrempunkte, Wendepunkt, Sattelpunkt, Nullstelle, Monotonie, Symmetrie, Tangente, Vorzeichenwechsel

Auf einen Blick

Planung für 6 Stunden

Einstieg

M 1	Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen

Erarbeitung

M 2	Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion f und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen f' und f''
M 3	Graphisches Ableiten – Mithilfe von Tangentensteigung
M 4	Graphisches Ableiten – Mithilfe von Steigungsbereichen

Übung/Stationenarbeit

M 5	Laufzettel zur Stationenarbeit
M 6	Station 1 – Graph mit einem Wendepunkt
M 7	Station 2 – Graph mit zwei Wendepunkten
M 8	Station 3 – Graph mit drei Wendepunkten
M 9	Station 4 – Graph mit Sattelpunkt
M 10	Tippkarten für das Stationenlernen

Rückbezug

M 11 (Ab)	Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 28.

Einstieg: Graphen der Funktion und der Ableitungsfunktion – Zusammenhänge erkennen

M 1

Maya behauptet:

Ich kann vom Graphen einer Funktion auf das Aussehen des Graphen der Ableitungsfunktion schließen.

Aufgabe

a) **Lesen** Sie Mayas Behauptu

b) **Betrachte** aphen.

c) **Beurtei** en Sie, ob Ma mit ihrer B hauptung recht hat, und **erläutern** Sie Ihre Entscheidung.

Bildquelle: SD Productions/E+

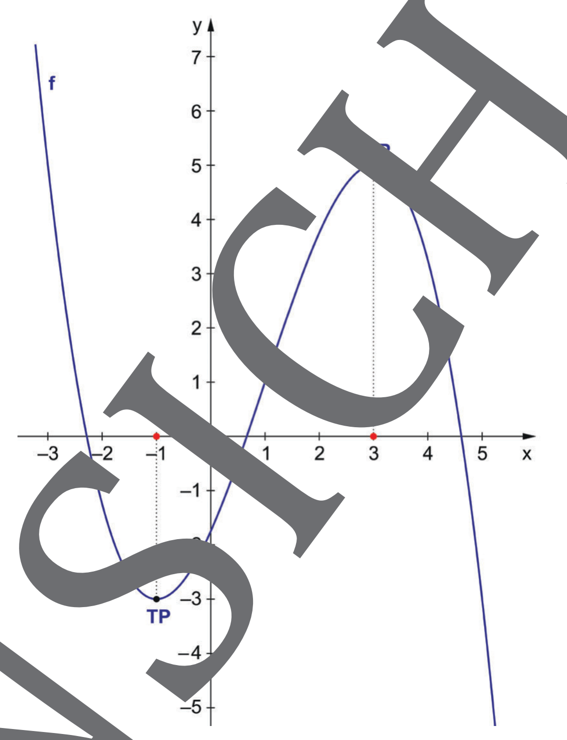
Aufgabe 2

Funktion *f(x)*	Erste Ableitung *f '(x)*	Zweite Ableitung *f ''(x)*
Der Graph von *f* ist im betrachteten Intervall streng monoton wachsend.	*f '(x)* ______ im betrachteten Intervall.	Keine Aussage möglich.
Der Graph von *f* ist im betrachteten Intervall streng monoton ______________.	*f '(x)* < 0 im betrachteten Intervall.	______________ ______________
Der Graph von *f* hat im betrachteten Intervall eine Linkskurve.	Der Graph von *f '* ist im betrachteten Intervall streng monoton ______________.	*f ''(x)* ______ im betrachteten Intervall.
Der Graph von f hat im betrachteten Intervall eine ______________.	Der Graph von f ' ist im betrachteten Intervall streng monoton fallend.	*f ''(x)* ______ [illegible] betrachteten Intervall.
Der Graph von *f* hat bei x_E eine Extremstelle. a) (lokaler) ______________ b) (lokaler) Tiefpunkt	*f '* hat bei x_E eine Nullstelle ($f'(x_E) = 0$). a) mit Vorzeichenwechsel von + nach [illegible] b) mit Vorzeichenwechsel ______________	a) *f ''(x)* ______ b) *f ''(x)* ______
Der Graph von *f* hat bei x_W eine Wendestelle.	Der Graph von *f '* hat bei x_W eine ______________.	*f ''* hat bei x_W eine ______________. ($f''(x_W) = 0$).
Der Graph von *f* hat bei x_S einen ______________	Der Graph von *f '* hat bei x_S eine Extremstelle, die auch Nullstelle ist.	*f ''* hat bei x_S eine ______________ ($f''(x_S) = 0$).
Der Graph von *f* ist achsensymmetrisch.	Der Graph von *f '* ist ______________.	Der Graph von *f ''* ist achsensymmetrisch.
Der Graph von *f* ist ______________.	Der Graph von *f '* ist achsensymmetrisch.	Der Graph von *f ''* ist punktsymmetrisch.

M 3 Graphisches Ableiten – Mithilfe von Tangentensteigung

Schritt 1

Die Stellen des Graphen von f mit **horizontaler Tangente (Hoch-, Tief- und Sattelpunkte)** sind die **Nullstellen** der Ableitungsfunktion f'.



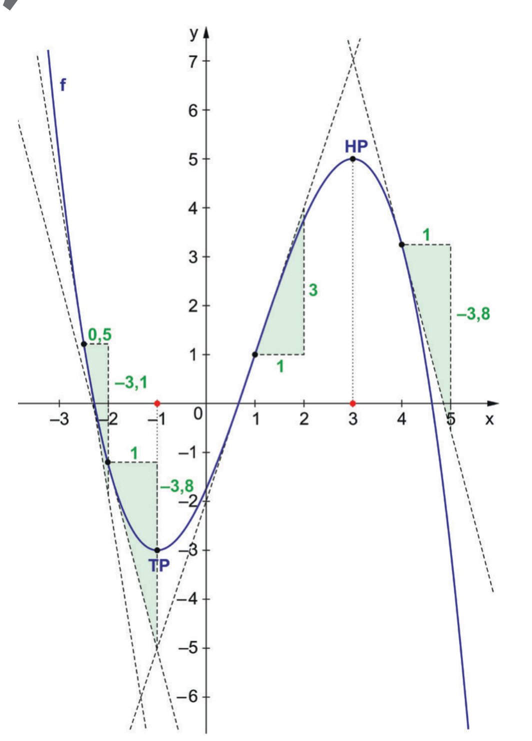
Schritt 2

Am Graphen der Funktio[illegible] we[illegible]den an ausgewählten Punkten Tang[illegible]nten gezeichnet und [illegible]n Steigunge[illegible] mithilfe eine[illegible] **Steigungs[illegible]iecks** ermitte[illegible]. W[illegible]n für Δ[illegible] entspricht de[illegible]elesene Wert von Δy dem Steigungswert [illegible]iesem Punkt. Allge[illegible]ilt:

$$m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Die Tangent[illegible]nsteigungen werden in [illegible]W[illegible]etabelle festgehalten.:

x	–2,5	–2	–1	1	3	4
$f'(x)$	– 6,2	–3,8	0	3	0	–3,8



M 5 Laufzettel zur Stationenarbeit

So geht's

- Es gibt 4 Stationen, die von jeder Person zu durchlaufen sind.
- Lösen Sie die Aufgaben jeder Station in Kleingruppen von 3 bis 4 Personen.
- Jede Station besteht aus zwei Aufgaben. Bearbeiten Sie die zwei Aufgaben einer Station in der vorgegebenen Reihenfolge.
- Bei Aufgabe 1 ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion aus dem Graphen der Ausgangsfunktion grob zu skizzieren.
- Bei der Lösung von Aufgabe 2 müssen Sie jeweils Ihre Kenntnisse über den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer Ableitungsfunktionen anwenden.
- Für das Lösen der Aufgaben ist für jede Station jeweils eine Unterrichtsstunde vorgesehen. Aufgaben, die Sie in dieser Zeit nicht schaffen, sollten Sie zu Hause fertigstellen.
- Bei Problemen tauschen Sie sich zunächst innerhalb der Kleingruppe aus und geben sich gegenseitig Hilfestellung. Wenn Sie als Gruppe nicht weiterkommen, nehmen Sie die Tippkarten zu Hilfe. Erst wenn Sie auch damit keinen Lösungsweg finden, fragen Sie die Lehrkraft.
- Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Pult aus, sodass Sie Ihre Rechnungen und Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Station		Erledigt?	Das habe ich noch nicht ganz verstanden ...
1	Graph mit einem Wendepunkt		
2	Graph mit zwei Wendepunkten		
3	Graph mit drei Wendepunkten		
4	Graph mit Sattelpunkt		

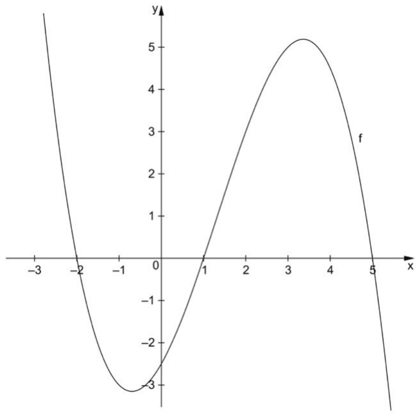
Station 1 – Graph mit einem Wendepunkt

M 6

Aufgabe 1

Gegeben ist der Graph einer Funktion *f*.

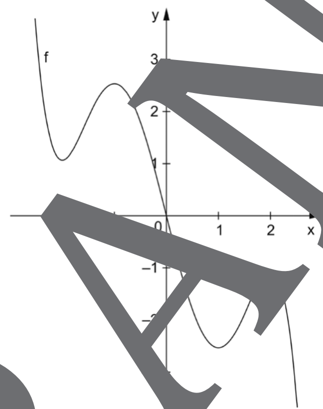
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Hinweis: Gehen Sie entsprechend der Schrittfolge zum grafisc[illegible] Differenzie[illegible] mithilfe von Steigungsbereichen vor und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis ggf. m[illegible]thilfe von Tangentenst[illegible]ngen.

Aufgabe 2

Gegeben ist der Graph einer Funktion *f*.



Entscheiden Sie, ob di[illegible]lgenden A[illegible]ssagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie Ihre Entsch[illegible]ung.

[illegible]age	wahr	falsch	Begründung
a) An d[illegible]r Stelle $x = -1$ ist [illegible]$(x) < 0$.	☐	☐	
b) Für x < [illegible] ist $f'(x) > 0$.	☐	☐	
c) A[illegible] der Stelle x [illegible] $''(x) = 0$.	☐	☐	
d) An de[illegible]telle $x = 1$ hat f' einen Vor-[illegible]chenw[illegible]chsel von positiven zu negativ[illegible]erten.	☐	☐	
e) Für $-1 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$.	☐	☐	
f) An der Stelle $x = 1{,}5$ ist $f'(x) < 0$.	☐	☐	

M 10 Tippkarten für das Stationenlernen

Station 1 – Graph mit einem Wendepunkt

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 1

Schritt 1:
An welchen Stellen hat der gegebene Graph waagerechte Tangenten?

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 2

Schritt 1:
Bei $x_1 \approx -0{,}7$ liegt ein Tiefpunkt, bei $x_2 \approx 3{,}4$ ein Hochpunkt vor.
Die Geraden $x \approx -0{,}7$ und $x \approx 3{,}4$ kennzeichnen die Steigungsbereiche.

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 3

Schritt 2:
Bestimmen Sie das Vorzeichen der Funktionswerte der Ableitungsfunktion f' anhand des Steigungsverhaltens des gegebenen Graphen von f in den einzelnen Bereichen.

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 4

Schritt 2:
In den Intervallen $]-\infty; -0{,}7[$ und $]3{,}4; +\infty[$ fällt der Graph von f.
Das bedeutet, dass die Steigung des Graphen von f negativ ist, also $f'(x) < 0$.
Damit können die Bereiche oberhalb der x-Achse für diese Intervalle ausgeschlossen und entsprechend gekennzeichnet werden.
Der Graph der Ableitungsfunktion f' verläuft unterhalb der x-Achse.

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 5

Schritt 2:
Im Intervall $]-0{,}7; 3{,}4[$ steigt der Graph von f.
Das bedeutet, dass die Steigung des Graphen von f positiv ist, also $f'(x) > 0$.
Damit kann der Bereich unterhalb der x-Achse für dieses Intervall ausgeschlossen und entsprechend gekennzeichnet werden.
Der Graph der Ableitungsfunktion f' verläuft oberhalb der x-Achse.

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 6

Schritt 3:
An welcher Stelle liegt der Wendepunkt des gegebenen Graphen?
Was für ein Krümmungswechsel liegt an dieser Stelle vor?

Station 1, Aufgabe 1: Tippkarte 7

Schritt 3:
Die Wendestelle des Graphen liegt etwa an der Stelle $x \approx 1{,}3$.
Das bedeutet, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' hier eine Extremstelle aufweist.
Da an der Wendestelle ein Links-Rechts-Wechsel vorliegt, besitzt der Graph der Ableitungsfunktion f' an dieser Stelle einen Hochpunkt.