## Geometrie

# 3D- und Augmented-Reality-Anwendung am Beispiel Zylinder – Unterricht greifbar machen

Nach einer Idee von Johann-Georg Vogelhuber



Diese Unterrichtseinheit unterstützt Sie dabei, Ihrer Klasse die Thematik der Volumen- und Oberflächenberechnung von Zylindern anschaulich und lebensnah zu vermitteln und noch dazu die Kompetenz des Modellierens zu stärken. Mithilfe der Nutzung von dynamischer Software zeigt dieses Material auf, wie am Beispiel von Zylindern Realobjekte in Modelle zur 3D- und Augmented-Reality-Ansicht übersetzt und im Unterricht eingesetzt werden können. Bieten Sie damit gerade Lernenden, die Probleme mit dem dreidimensionalen Vorstellungsvermögen haben, einen neuen Zugang. Zudem bietet das Material motivierende Anwendungskontexte zum Themenbereich „Nachhaltigkeit“.

**KOMPETENZPROFIL**

Kahoot!

| | |
|---|---|
| **Klassenstufe:** | 9/10 |
| **Dauer:** | 6 Unterrichtsstunden (Minimalplan 3) |
| **Inhalt:** | Oberfläche und Volumen von Zylindern |
| **Kompetenzen:** | Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3) |
| **Medien:** | GeoGebra-3D-App |

## Didaktisch-methodisches Konzept

Augmented-Reality-Anwendungen eignen sich im Mathematikunterricht besonders zur Visualisierung und Modellierung von geometrischen Objekten. Durch die Einbettung der geometrischen Körper in einen lebensweltlichen Kontext können die Lernenden eine inhaltliche Vorstellung für den Aufbau und die Eigenschaften dieser Körper aufbauen. Insbesondere können sie durch die Modellierung dieser Körper direkt den Zusammenhang zwischen Volumen, Oberfläche und den Abmessungen des Körpers erfahren. Durch den entdeckenden Zugang wird beispielsweise der Zusammenhang zwischen Höhe eines Körpers und dessen Volumen erfahren und so eine inhaltliche Vorstellung für die abstrakte Formel zur Berechnung des Volumens entwickelt. Auf die gleiche Weise ist es möglich, die Grundvorstellung für geometrische Körper auf der enaktiven und ikonischen Ebene zu entdecken, bevor das symbolische Kalkül entwickelt wird.
Die Aufgaben dieser Unterrichtseinheit sind dabei sowohl handlungs- als auch problemorientiert gestaltet, sodass die Lernenden den Modellierungsprozess in einem realitätsbezogenen Kontext durchführen können.
Der Einsatz von GeoGebra 3D im Mathematikunterricht wird durch das verlinkte Video gut erklärt. Dieses Video ist gut geeignet für die eigene Vorbereitung auf die Unterrichtseinheit:
https://raabe.click/webinarAR

**Um was geht es inhaltlich?**
In dieser Unterrichtseinheit erarbeiten sich die Lernenden die Formeln zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Zylindern. Dabei wird besonders Wert auf den Zusammenhang zwischen Höhe und Radius auf das Volumen bzw. die Oberfläche gelegt. So kann die fundamentale Idee „Grundfläche mal Höhe" zur Berechnung des Volumens mit dieser Einheit weiter vertieft werden.

**Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?**
Den **Einstieg** bildet das Arbeitsblatt „GeoGebra 3D kennenlernen" (**M 1**). Dieser Arbeitsauftrag ist losgelöst von der folgenden inhaltlichen Bearbeitung und dient zur Vorentlastung der ersten Modellierungsschritte. Die Lernenden sollen mit diesem Arbeitsauftrag ihr Smartphone oder Tablet für die Verwendung von GeoGebra 3D vorbereiten und anschließend die Funktionen dieses Werkzeugs entdecken. Werden bereits vorbereitete Endgeräte verwendet, so kann der Schritt zur Installation der benötigten Apps entfallen.
Haben die Lernenden bereits Erfahrungen mit der Augmented-Reality-Funktion von GeoGebra 3D gesammelt, so kann direkt mit dem Arbeitsblatt „Wie groß ist das Volumen einer Trinkflasche?" (**M 2**) begonnen werden.

Der zweite Teil des Einstiegs wird mit dem Material **M 2** durchgeführt. Dieses Material beinhaltet eine Handlungssituation, in der die Lernenden ihre Trinkflaschen mithilfe der Augmented-Reality-Funktion modellieren und vermessen sollen. Trinkflaschen sind in der Regel in jeder Klasse mehrfach verfügbar, sodass zusätzlich kein Material mitgebracht werden muss. Es sollte darauf geachtet werden, dass in jeder Gruppe eine möglichst zylinderförmige Flasche ausgewählt wird. Bei der Modellierung ist zusätzlich zu beachten, dass die Skalierung des Koordinatensystems zu den Abmessungen der Flasche passt. Es kann vorab bewusst auf diesen Hinweis verzichtet werden. Dann müssen während der Ergebnispräsentation die vorgestellten Ergebnisse im Sachkontext bewertet und hinterfragt werden. Anschließend ist eine erneute Bearbeitung der Modellierungsaufgabe zur Korrektur der Ergebnisse sinnvoll. Um das Koordinatensystem passend zu skalieren, kann einfach ein Geodreieck oder Lineal vor die Flasche gelegt werden. Das Koordinatensystem kann dann mit

zwei Fingern verschoben und skaliert werden, bis die Einheiten zu den Markierungen auf dem Lineal passen.
Während der Besprechung der Ergebnisse sollte darauf hingearbeitet werden, dass eine Formel zur Berechnung des Volumens wahrscheinlich genauer ist und eine Überprüfung der Ergebnisse ermöglichen würde.

Die **Erarbeitung** dieser Formel erfolgt dann mit dem Material „Wie berechnet man das Volumen eines Zylinders?“ (**M 3**). Mit den einzelnen Aufgaben erarbeiten sich die Lernenden die Formel zur Volumenberechnung. Die letzte Aufgabe bildet dann den Abschluss für die Handlungssituation. Hier kann in der Ergebnispräsentation auch eine mögliche Antwort für die Fragestellung von Material **M 2** erarbeitet und der Arbeitsprozess reflektiert werden.

Die Volumenberechnung von Zylindern muss dann in der Handlungssituation des Arbeitsblattes „Übungsaufgabe zur Volumenberechnung“ (**M 4**) von Ihrer Klasse angewendet werden. Diese Aufgabe ist auf eine selbstständige Bearbeitung ausgelegt. Durch das verlinkte Hilfematerial können die Lernenden Zwischenlösungen zur Kontrolle abfragen und sich zusätzliche Hilfestellungen anzeigen lassen. Die Handlungssituation **M 4** kann auch losgelöst von der restlichen Unterrichtseinheit zur Wiederholung oder Vertiefung bearbeitet werden.

Anschließend erfolgt auf gleiche Weise die Erarbeitung der Oberfläche eines Zylinders mit dem Arbeitsblatt „Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders?“ (**M 5**). Die Situationsbeschreibung sollte wieder gemeinsam bearbeitet und mithilfe der vorbereiteten Analysefragen strukturiert werden. Die Erarbeitung der Formel für die Oberfläche erfolgt dann mit den nachfolgenden Aufgaben. Ziel der Handlungssituation ist es, den Materialbedarf für eine Flaschenverpackung zu berechnen. Diese Aufgabe kann dabei durch eine didaktische Reduktion differenziert werden. Die Situationsbeschreibung lässt dabei zwei Bearbeitungswege zu. Sinnvoll ist es, zunächst alle Lernenden die vereinfachte Variante – die Verpackung besteht aus einem vollständigen Zylinder – bearbeiten zu lassen. Leistungsstärkere Lernende können dann über die Zusatzaufgabe eine Modellierung mit Verpackung und Deckel vornehmen.

Die **Ergebnissicherung** wird mit den Arbeitsblättern „Vertiefende Hausaufgabe“ (**M 6**) und „Eigenschaften von Zylindern“ (**M 7**) durchgeführt. **M 6** ist als Hausaufgabe konzipiert. Die Lernenden sollen dabei in ihrer Umgebung nach zylinderförmigen Objekten suchen und diese mithilfe von GeoGebra 3D modellieren. Die Bearbeitung dieses Materials kann auch in der Schule erfolgen. Die Formeln zur Berechnung von Zylindern werden dann mit dem Übersichtsblatt **M 7** noch einmal schriftlich festgehalten. Dieses Material beinhaltet auch Übungsaufgaben zur Anwendung der einzelnen Formeln.

Als **kreative/spielerische Übung** oder zur **Lernerfolgskontrolle** kann das verlinkte *Kahoot!*-Quiz verwendet werden: https://raabe.click/kahoot-zylinder

**Was muss bekannt sein?**
Die Bearbeitung des Materials setzt grundlegende Kenntnisse zur Flächenberechnung von Kreisen und Rechtecken voraus. Auch die Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Quadern sollte bekannt sein.

**Diese Kompetenzen trainieren Ihre Lernenden**

Die Lernenden

- lösen Probleme mathematisch (K 2), indem sie die Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens eines Zylinders zur Beantwortung von Aufgaben im Sachkontext verwenden.
- modellieren mathematisch (K 3), indem sie reale Objekte mithilfe der AR-Funktion von GeoGebra nachbilden.

## Erklärung zu den Symbolen

| | | |
|---|---|---|
| Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau. | | |
| einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau |
| Zusatzaufgaben | Alternative | Video |

# Auf einen Blick

Planung für 5–6 Stunden

## Einstieg

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Problemorientierter Unterrichtseinstieg** |
| **M 1** | GeoGebra 3D kennenlernen |
| **M 2** | Wie groß ist das Volumen einer Trinkflasche? |
| **Benötigt:** | ☐ Smartphone oder Tablet mit GeoGebra-3D-App |

## Erarbeitung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Oberfläche und Volumen eines Zylinders berechnen** |
| **M 3** | Wie berechnet man das Volumen eines Zylinders? |
| **M 4** | Übungsaufgabe zur Volumenberechnung |
| **M 5** | Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders? |
| **Benötigt:** | ☐ Smartphone oder Tablet mit GeoGebra-3D-App |



## Ergebnissicherung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Systematisieren und ordnen** |
| **M 6** | Vertiefende Hausaufgabe |
| **M 7** | Eigenschaften von Zylindern |
| **Benötigt:** | ☐ Smartphone oder Tablet mit GeoGebra-3D-App |

## Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 17.

## Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei Stunden mit den folgenden Materialien:

| | |
|---|---|
| **M 1** | GeoGebra 3D kennenlernen |
| **M 2** | Wie groß ist das Volumen einer Trinkflasche? |
| **M 5** | Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders? |
| **M 7** | Eigenschaften von Zylindern |

# M 1

## Anleitung: GeoGebra 3D kennenlernen

Mit der App GeoGebra 3D kannst du mithilfe der Kamera deines Smartphones die Realität um geometrische Objekte „erweitern“, um echte Körper in deiner Umgebung nachzubauen und besser zu verstehen.

**Vorbereitungen Android**

Damit du die App auf deinem Android-Smartphone oder Tablet nutzen kannst, musst du zwei Apps installieren. Als Erstes benötigst du die App „Google-Play Dienste für AR“. Diese App kannst du einfach über den Playstore installieren. Öffne dazu den unten stehenden Link. Anschließend musst du noch „*GeoGebra 3D*“ auf dem gleichen Weg installieren.

| Android | |
|---|---|
| a) Google-Play Dienste für AR<br>https://raabe.click/Google-Play AR | b) GeoGebra 3D<br>https://raabe.click/3D-App-Android |

**Vorbereitungen iOS**

Auf einem Apple-Endgerät benötigst du nur eine App, die du über den Appstore installieren kannst. Suche dazu entweder im Appstore nach „*GeoGebra 3D*“ oder öffne den entsprechenden Link auf dieser Seite.

| iOS |
|---|
| GeoGebra 3D<br>https://raabe.click/3D-App-iOS |

Nach erfolgreicher Installation kann die App nun ausprobiert werden. Tippe dazu das entsprechende App-Icon an. Anschließend tippe den runden „AR“-Button an, um die Augmented-Reality-Funktion zu aktivieren. Sollte kein „AR“-Button zu sehen sein, könnte es sein, dass dein Gerät zu alt ist und diese Funktion nicht unterstützt.

Die nachfolgenden Aufgaben dienen dazu, dass du die App besser kennenlernen kannst.

**Aufgabe 1**

a) **Starte** die App.
b) **Wechsle** in den AR-Modus, indem du den runden „AR“-Button antippst, und **folge** den Anweisungen auf dem Bildschirm, bis du ein Objekt platzieren kannst.
   **Hinweis:** Alternativ kannst du auch erst in der 3D-Darstellung arbeiten und am Ende deiner Konstruktion in den AR-Modus wechseln.
c) **Platziere** anschließend eine Kugel auf dem Bildschirm.
   **Hinweis:** Es gibt zwei Werkzeuge, mit denen man eine Kugel platzieren kann. Welches ist das günstigere Werkzeug, wenn man den Mittelpunkt und den Radius festlegen möchte?
d) **Erläutere**, wie du den Mittelpunkt und den Radius einer Kugel festlegen kannst.
e) **Gehe** anschließend um die Kugel **herum**, um das Objekt von allen Seiten zu betrachten.

**Aufgabe 2**

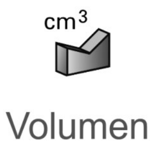
a) **Zeichne** neben der Kugel ein Rechteck.
   **Hinweis:** Verwende das Werkzeug


b) **Konstruiere** anschließend aus diesem Vieleck einen Quader. **Nutze** hierzu das Werkzeug


**Aufgabe 3**

a) **Messe** die Seitenlänge deines Quaders aus Aufgabe 2.
   **Hinweis:** Dies gelingt dir mit dem Werkzeug


b) **Lass** dir Flächeninhalte und Volumina der Körper in der Ansicht **anzeigen**.
   **Hinweis:** Dies funktioniert mithilfe der Werkzeuge


c) **Erstelle** von deinem fertigen Ergebnis einen Screenshot. Dazu kannst du den Kamera-Button in der App verwenden.

# M 2 Einstieg: Wie groß ist das Volumen einer Trinkflasche?


© romrodinka/iStock/ Getty Images Plus

Die Schülerinnen und Schüler der 9. Klasse betreiben eine Schülerfirma. Ziel dieser Schülerfirma ist es, nachhaltige Produkte für die Mitschülerinnen und Mitschüler herzustellen und an diese zu verkaufen und so etwas zu den Nachhaltigkeitszielen der Schule beizutragen.

Metin: „Wir sollten dringend Trinkflaschen mit in unser Sortiment aufnehmen.“
Yannik: „Warum? Das brauchen die meisten doch nicht. Die Plastikflaschen aus dem Supermarkt sind doch viel praktischer.“
Sarah: „Dir ist schon klar, dass das Einwegflaschen sind, die eine Menge Plastikmüll ergeben?“
Yannik: „Du hast recht. Aber wie groß sollten die Flaschen wohl werden? Ich finde ja, ein halber Liter muss mindestens sein.“
Sarah: „Wir können ja unsere Trinkflaschen ausmessen und schauen, wie viel da so reinpasst. Am besten wäre natürlich eine möglichst einfache Form. Also runder Boden und wenig Schnörkel.“

**Analyse**

**Welches Ziel haben die Schülerinnen und Schüler der Schülerfirma?**

**Wie wollen sie dazu vorgehen?**

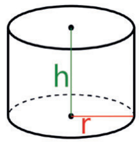
**Arbeitsauftrag**

a) **Sucht** euch zusammen eine eurer mitgebrachten Trinkflaschen aus.
b) **Verwendet** *GeoGebra 3D*, um ein Modell der Flasche zu erstellen.
   **Tipp 1:** Verwendet dazu das Werkzeug „Kreis aus drei Punkten“. Geht dazu um die Flasche herum und markiert drei Punkte auf dem Rand. Anschließend könnt ihr die Zylinderform mit „Prisma extrudieren“ herstellen.
   **Tipp 2:** Damit die Berechnungen auch zu den Abmessungen der Flasche passen, müsst ihr das Koordinatensystem passend skalieren. Mit zwei Fingern könnt ihr das Koordinatensystem verschieben, skalieren und drehen.
   **Tipp 3:** Sieh dir dieses Video an: https://raabe.click/AR-Modellieren
c) **Lasst** euch in der App dann das Volumen anzeigen.
d) **Bewegt** das Smartphone so, dass Modell und Flasche nebeneinanderstehen.
e) **Macht** zur Ergebnissicherung einen Screenshot.
f) **Überprüft** euer Ergebnis: Ist dieser Wert sinnvoll? Gibt es vielleicht eine Herstellerangabe zum Volumen auf der Flasche? Dann **vergleicht** die Angaben.

# Erarbeitung: Zylindervolumen

**M 3**

Das Volumen eines Zylinders kann auch mit einer Formel berechnet werden. Die Rechenregeln für das Volumen und die Eigenschaften eines Zylinders wirst du dir mit den folgenden Aufgaben selbstständig erarbeiten.




**Öffne** dazu die GeoGebra-3D-App und **wechsle** in den AR-Modus, damit du dir die erstellten Objekte auch genau anschauen kannst.

**Aufgabe 1**

a) **Erstelle** mit GeoGebra 3D nebeneinander unterschiedliche Zylinder aus gleich großen Kreisen. Die Zylinder sollen alle unterschiedliche Höhen haben.
b) **Zeige** dann für diese Zylinder das Volumen **an.**
c) **Vervollständige** die Sätze im folgenden Kasten.

> Je höher der Zylinder, desto ____________________ ist das Volumen.
> Je niedriger der Zylinder, desto ____________________ ist das Volumen.

d) **Wiederhole** das Experiment mit weiteren Zylindern aus unterschiedlich großen Kreisen. Diese Zylinder sollen alle ungefähr die gleiche Höhe haben.
e) **Vervollständige** wieder die folgenden Sätze.

> Je **größer** der Radius des Zylinders, desto ____________________ ist das Volumen.
> Je **kleiner** der Radius des Zylinders, desto ____________________ ist das Volumen.

**Tipp:**
Verwende zum Erstellen der Kreise die Funktion „Kreis mit Mittelpunkt". Dazu musst du zuerst einen Punkt anlegen.

**Aufgabe 2**

a) **Erstelle** in GeoGebra 3D nebeneinander jeweils einen Kreis mit den Radien 1 und 2 Einheiten.
b) **Lass** dir jeweils den Flächeninhalt **anzeigen** und **notiere** sie hier:
Kreisfläche mit Durchmesser 1: ____________________
Kreisfläche mit Durchmesser 2: ____________________
c) **Gib** die Formel zur Berechnung der Kreisfläche **an**. **Verwende** die Variable r für den Radius.
Formel für die Kreisfläche: ________________________________________

**Aufgabe 3**

a) **Erstelle** aus beiden Kreisen jetzt einen Zylinder mit Höhe 1.

b) **Lass** dir das Volumen **anzeigen**.

c) **Erstelle** weitere Zylinder mit den Radien aus Aufgabe 2, aber mit anderen Werten für die Höhe.

d) Wie ändert sich das Volumen, wenn die Höhe 2, 3, 4 etc. Einheiten beträgt?
**Notiere** deine Beobachtungen und eine Vermutung für die Berechnung des Volumens.

**Tipp:** Schau dir dieses Video an: https://raabe.click/Zylinder-Volumen

**Aufgabe 4**

a) **Berechne** das Volumen für die Trinkflasche (siehe **M 1**).

b) Stimmt dein Rechenergebnis mit dem Wert von GeoGebra 3D überein? **Vergleiche**.

c) Was könnte die Ursache für mögliche Unterschiede sein? **Nenne** mögliche Ursachen.

# Übung: Die Regentonne – Zylindervolumen berechnen M 4

**Situationsbeschreibung**

Die Mitglieder der AG Nachhaltigkeit überlegen, wie in der Schule Wasser eingespart werden könnte.

Michael: „Dieses Jahr hat mich im Sommer echt gestört, dass der Hausmeister die Pflanzen auf dem Schulhof die ganze Zeit mit Leitungswasser gegossen hat.“


© Dorling Kindersley

Gabriela: „Echt eine Verschwendung. Könnten wir nicht Regenwasser sammeln und das dann nehmen?“

Michael: „Die Idee finde ich gut. Die Regentonne muss nur groß genug sein, damit sich das auch lohnt.“

Gabriela: „Wir sollten den Hausmeister fragen, wie viel Wasser er im Sommer verbraucht hat. Vielleicht weiß er das.“

Nach der Befragung des Hausmeisters treffen sie sich wieder.

Michael: „Also fassen wir zusammen. Wir brauchen pro Sommertag ca. 60 Liter Wasser, und wir sollen eine zylinderförmige Tonne nehmen.“

Gabriela: „Er hat auch gesagt, dass wir die Tonne nicht zu groß machen sollten. Wenn das Wasser für ca. 6 Tage reicht, dann ist es okay.“

Michael: „Die Regentonne sollte maximal einen Durchmesser von 60 cm haben. Das sollten wir ausnutzen. Beim Baumarkt in der Bleichstraße gibt es solche Tonnen mit den Höhen 100 cm, 125 cm und 150 cm.“

**Tipp**: Bei der Bearbeitung der Aufgaben kannst du die verlinkte Hilfe https://raabe.click/M4-Hilfe zur Kontrolle deiner Berechnungen die App GeoGebra 3D verwenden.

**Aufgabe 1**

**Überlege** dir, welche Frage die beiden beantworten wollen und welche Informationen zur Verfügung stehen. **Schreibe** deine Frage mit eigenen Worten **auf** und **notiere** die bekannten Informationen.

**Aufgabe 2**

**Überlege**, welche Rechenschritte notwendig sind, damit die Frage beantwortet werden kann. **Schreibe** deine Überlegungen so genau wie möglich **auf**.

**Aufgabe 3**

**Berechne** das Volumen für die einzelnen Regentonnen. Und **beantworte** die Frage mit 2–3 Sätzen.

**Aufgabe 4**

**Berechne,** wie hoch die Regentonne sein müsste, damit der Vorrat für 9 Tage ausreicht, wenn die Tonne komplett gefüllt ist.

# M 5 Erarbeitung: Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders?

**Situationsbeschreibung**

Nach der Auswahl der geeigneten Trinkflasche überlegen die Schülerinnen und Schüler, wie das Produkt verpackt werden soll, damit es zum Verkauf angeboten werden kann.

© Jobalou/DigitalVision Vectors

Michael: „Die Verpackung sollte schon ökologisch sein und nicht zu viel Material verbrauchen."

Gabriela: „Also am besten aus Recyclingpappe und in der gleichen Form wie die Flasche."

Michael: „Also auch wieder ein Zylinder. Na ja eigentlich sind es zwei Zylinder. Der Deckel kommt nämlich auch noch dazu."

Gabriela: „Das sollten wir vielleicht erst mal ignorieren und so tun, als ob die Verpackung ein geschlossener Zylinder ist. Das ist einfacher zu rechnen."

Michael: „Beim letzten Mal haben wir pro Quadratmeter Karton ca. 5,50 € bezahlt. Unsere Verpackung sollte einen Durchmesser von 7 cm und eine Höhe von 21,5 cm haben. Dann passt die Flasche gut in die Schachtel."

Gabriela: „Okay. Dann müssen wir mal rechnen ... Mehr als 50 Cent dürfen wir pro Schachtel nicht ausgeben."



**Analyse**

**Welche Frage wollen Michael und Gabriela beantworten?**

**Welche Informationen haben sie dazu zur Verfügung?**

**Was müssen die beiden genau berechnen (mathematische Formulierung)?**

**Aufgabe 1**

a) **Bilde** den Zylinder für die Verpackung mit GeoGebra 3D **nach**.
b) **Schau** dir die einzelnen Flächen aus unterschiedlichen Blickwinkeln genauer an.
c) **Markiere** die Flächen mit unterschiedlichen Farben.
d) **Zeige** dann die Flächeninhalte für die Teilflächen **an**.
e) **Fertige** einen Screenshot **an**.

**Tipp:** Die große rechteckige Fläche kann nicht direkt mit einem *GeoGebra*-Werkzeug angezeigt werden. Überlege, welche Größen du dir stattdessen anzeigen lassen könntest.

**Aufgabe 2**

**Verwende** deine Ergebnisse aus Aufgabe 1, um die Frage zu beantworten. **Formuliere** dazu auch eine ausführliche Antwort.

**Tipp:** Das Ergebnis in GeoGebra 3D wird dir in $cm^2$ angezeigt. Die Preisangabe ist aber in $m^2$.

**Aufgabe 3**

a) **Überlege** dir eine Formel für die Berechnung der gesamten Oberfläche. Dazu solltest du nur die Höhe und den Radius des Zylinders verwenden.
**Schau** dir dazu den Zylinder aus Aufgabe 1 noch einmal genauer an. Bei Bedarf kannst du das verlinkte Erklärvideo verwenden: https://raabe.click/Zylinder-Oberflaeche.

b) **Berechne** mit dieser Formel den Materialverbrauch und anschließend die Materialkosten.

c) **Vergleiche** das Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabe 2.

d) **Vervollständige** nun den folgenden Merksatz:

| **Oberfläche eines Zylinders** |
|---|
| Die Oberfläche eines Zylinders besteht aus zwei ______________ und einer ____________ Mantelfläche. ______________ man diese Flächeninhalte, so hat man die gesamte Oberfläche des Zylinders berechnet.<br>Formel für die Kreisfläche: ________________________________________<br>Formel für die Mantelfläche: ______________________________________ |

**Aufgabe 4**

In der Situationsbeschreibung wurde die Berechnung der Verpackung etwas vereinfacht. Mit ein wenig Geschick kann man das benötigte Material auch genauer ausrechnen.

**Schau** dir dazu auch die Abbildung auf der vorherigen Seite **an**.

Die Verpackung besteht aus zwei Zylindern, die jeweils auf einer Seite offen sind. Der Zylinder für den Deckel muss einen etwas größeren Durchmesser haben als der große Zylinder.

**Entwirf** mit GeoGebra 3D ein Modell für diese Verpackung und **berechne** wieder die Materialkosten.

# Sicherung: Vertiefende Hausaufgabe

**M 6**

Mit den folgenden Aufgaben kannst du die Modellierung und Berechnung von Zylindern noch einmal in Ruhe zu Hause üben. Du brauchst dazu wieder die App *„GeoGebra 3D"*.

**Aufgabe 1**

a) **Suche** nach zylinderförmigen Objekten in deiner Umgebung.

b) **Erstelle** mit GeoGebra 3D ein Modell von mindestens einem Objekt. **Achte** dabei auf die Skalierung und Positionierung des Koordinatensystems. Die Grundflächen und die Mantelflächen kannst du auch in unterschiedlichen Farben **darstellen**, damit man die Modellierung besser erkennt. **Zeige** noch Oberfläche und Volumen in der App an.

c) **Bewege** dein Smartphone dann so, dass du dein Modell neben dem realen Objekt siehst, und **fertige** einen Screenshot an.

**Tipp:**

Achte darauf, dass die Skalierung des Koordinatensystems zu den Abmessungen des Objektes passt. Messe z. B. vorher die Höhe aus und ziehe dein Koordinatensystem mit zwei Fingern auf die richtige Größe. Du kannst das Koordinatensystem auch verschieben.

**Aufgabe 2**

**Berechne** Oberfläche und Volumen auch mithilfe der Formeln aus dem Unterricht. Dazu musst du die Objekte mit einem Lineal vermessen. **Schreibe** deine Messergebnisse und deinen Rechenweg genau **auf:**

**Aufgabe 3**

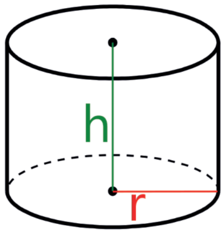
**Vergleiche** deine rechnerischen Ergebnisse aus Aufgabe 2 mit den Ergebnissen aus Aufgabe 1. Wie gut passen rechnerische Ergebnisse und die Anzeige in der App zusammen? Gibt es Abweichungen? Kannst du eine Erklärung für die Abweichung finden?

## M 7

# Sicherung: Eigenschaften von Zylindern

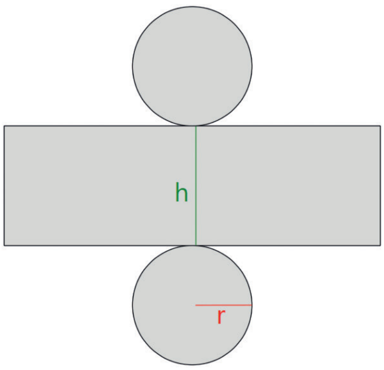
**Aufgabe 1**

**Vervollständige** den folgenden Lückentext.




Ein Zylinder ist ein geometrischer Körper. Er besteht aus zwei parallel gegenüberliegenden ______________ flächen und einer ______________________ Mantelfläche. Das Volumen eines Zylinders berechnet man, indem der ______________ der Grundfläche mit der ______________ des Zylinders multipliziert wird. Bezeichnet man mit *r* den ______________ der Grundfläche, dann kann der Flächeninhalt der Grundfläche mit der Formel ________________ berechnet werden. Die Formel für das **Volumen** des Zylinders lautet damit:

V = ________________________




Um die Oberfläche eines Zylinders zu berechnen, braucht man die Angabe der ______________ und des ______________. Die Oberfläche besteht aus ______ Kreisflächen und der ________________ Mantelfläche. Den Inhalt einer Kreisfläche berechnet man mit der Formel ______________________ und den Inhalt der Mantelfläche mit der Formel ________________________.

Addiert man diese Formeln, so erhält man die Formel für die **Oberfläche** O = ______________________________.

**Aufgabe 2**

Eine Konservendose hat einen Durchmesser von 73 mm und eine Höhe von 58 mm.
**Berechne** das Volumen der Dose.

**Aufgabe 3**

Das Blech für die Konservendose wiegt 15 g pro 100 cm$^2$.
**Berechne** das Gewicht der leeren Dose mit den Abmessungen aus Aufgabe 2.
**Tipp:** Du musst zuerst die Oberfläche berechnen.

**Aufgabe 4**

**Berechne,** wie viel Blech man benötigt, um eine Konservendose mit einem Durchmesser von 10 cm und einem Volumen von einem Liter herzustellen.

**Tipp:** Berechne mit den Angaben zuerst die Höhe.

# Lösungen

## Lösungen (M 1)

**Aufgabe 1**

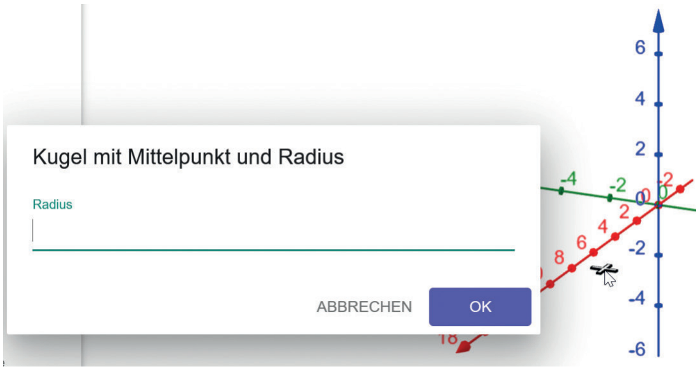
c) Es gibt die beiden unteren Werkzeuge, um eine Kugel zu platzieren.

1. 


2. 

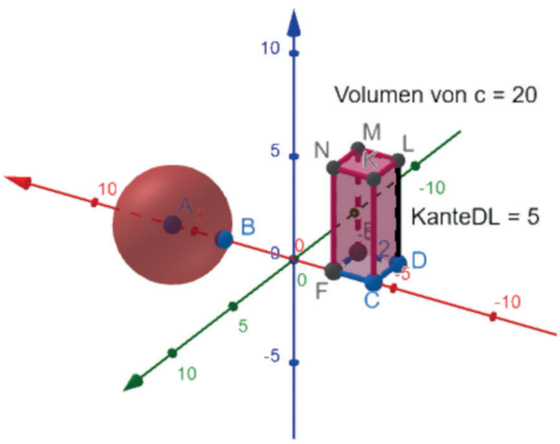

Das zweite Werkzeug ist günstiger, wenn man Mittelpunkt und Radius festlegen möchte, da man hier den Radius direkt eingeben kann.

d) Wenn du mit dem 2. Werkzeug aus c) gearbeitet hast, kannst du mit deinem Finger den Cursor steuern. Je nachdem mit welchem Gerät und in welcher Ansicht du arbeitest, wird dir hierbei ein weißer Kreis mit einem weißen Punkt, nur ein weißer Punkt oder ein weißes Kreuz angezeigt. Damit kannst du dir eine Stelle aussuchen, an der du den Mittelpunkt haben möchtest, und mit tippen auf den Bildschirm wird der Punkt dort angelegt. Den Radius kannst du dann einfach in das aufploppende Fenster eintragen.




**Aufgabe 2 + 3**

Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://www.geogebra.org/m/bgbkxk3x



## Lösungen (M 2)

**Analyse**

**Welches Ziel haben die Schülerinnen und Schüler der Schülerfirma?**

Es soll eine Trinkflasche in das Sortiment der Schülerfirma mitaufgenommen werden. Diese Flasche sollte mindestens einen halben Liter fassen können.

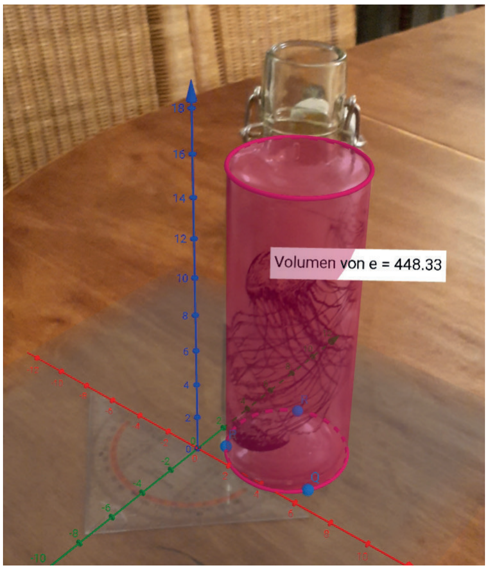
**Wie wollen sie dazu vorgehen?**

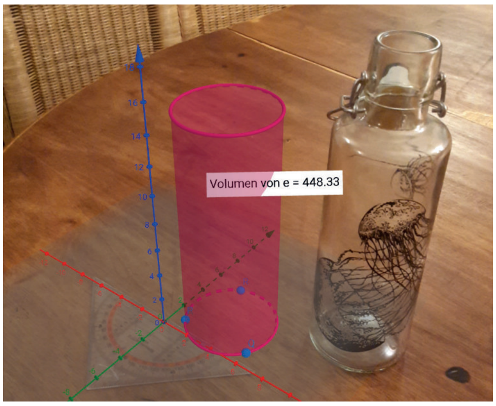
Ihre eigenen Trinkflaschen vermessen, um ein geeignetes Modell zu finden. Die Flaschen sollten möglichst einfach geformt sein.

**Arbeitsauftrag**

b), c), d) Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://www.geogebra.org/3d/prxpezfy

e)




f) Das Ergebnis für das dargestellte Beispiel ist ein Rauminhalt von ca. 448 cm³. Das würde einem Rauminhalt von ca. 448 ml entsprechen. Der tatsächliche Inhalt laut Hersteller ist 500 ml.
Das Beispiel zeigt eines der typischen Probleme bei der Modellierung mit *GeoGebra 3D*. Die Skalierung und die Positionierung des Koordinatensystems sind entscheidend. Es ist bei der Arbeit auf ein gutes Umgebungslicht und eine klar erkennbare Oberfläche zu achten. Wichtig ist auch eine ruhige Bewegung des Smartphones bei der Modellierung. Hektische Bewegungen verfälschen die Werte.
Hinweis: Bei großen Abweichungen zu plausiblen Werten ist es sinnvoll, die Modellierung unter unterschiedlichen Bedingungen und mit anderen Smartphones zu wiederholen.

## Lösungen (M 3)

**Aufgabe 1**

a), b) Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://www.geogebra.org/m/pmcfneqe

c) Je höher der Zylinder, desto größer ist das Volumen.
Je niedriger der Zylinder, desto kleiner ist das Volumen.

d) Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://www.geogebra.org/m/jwhgmkgb

e) Je größer der Radius des Zylinders, desto größer ist das Volumen.
Je kleiner der Radius des Zylinders, desto kleiner ist das Volumen.

**Aufgabe 2**

Kreisfläche mit Radius 1: $\pi$
Kreisfläche mit Radius 2: $4 \cdot \pi \approx 12{,}57$
Formel für die Kreisfläche: $A = \pi \cdot r^2$

**Aufgabe 3**

Das Volumen beträgt für den Zylinder mit Radius 1 und Höhe 1: $V = \pi$
Wird die Höhe auf 2 erhöht, so verdoppelt sich das Volumen: $V = 2\pi$
Dies lässt sich genauso beim Zylinder mit Radius 2 beobachten. Bei Höhe 1 beträgt das Volumen $4\pi$ . Wird die Höhe auf 2 erhöht, erhält man als Volumen $8\pi$. D. h., das Volumen steigt proportional zur Höhe und ist jeweils ein Vielfaches der Grundfläche:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://geogebra.org/m/qcsgasym

**Aufgabe 4**

Berechnung für das Beispiel: Durchmesser ist 7 cm, Höhe des zylinderförmigen Teils ist 15 cm.

$$V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 15 \approx 577{,}3$$

Das rechnerische Ergebnis ist ca. 30 % größer als das Ergebnis der Modellierung. Die Modellierung mit GeoGebra 3D ermöglicht lediglich eine ungefähre Näherung. Neben den Umgebungsbedingungen ist auf die richtige Skalierung des Koordinatensystems zu achten.

## Lösungen (M 4)

**Aufgabe 1**

Frage:
Welches ist die kleinste Regentonne, die ausreichend Wasser zum Gießen fasst?
Vorhandene Daten:
Zeitraum 6 Tage; Verbrauch pro Tag 60 Liter; zylinderförmige Tonnen; drei Tonnen zur Auswahl: Alle haben den gleichen Durchmesser (60 cm), aber unterschiedliche Höhen (100 cm; 125 cm; 150 cm)

**Aufgabe 2**

Zunächst muss überlegt werden, wie viel Wasser die Regentonne ungefähr fassen sollte. Das Wasser muss für ca. 6 Tage reichen und pro Tag werden ca. 60 Liter benötigt, also insgesamt $6 \cdot 60 = 360$ Liter.

Nun muss berechnet werden, wie viel Wasser die einzelnen Regentonnen jeweils fassen können, also wie viel Volumen diese Regentonnen jeweils haben. Da die Regentonnen zylinderförmig sind, kann das Volumen mithilfe der Formel $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ berechnet werden.

Dabei muss das Volumen von $cm^3$ in Liter umgerechnet werden. (Durch 1000 teilen.)

**Aufgabe 3**

Der Durchmesser ist 60 cm. Daher ist der Radius 60 cm : 2 = 30 cm.

$V_{100} = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \approx 282743 \text{ cm}^3 = 282{,}74$ Liter

$V_{125} = \pi \cdot 30^2 \cdot 125 \approx 353429 \text{ cm}^3 = 353{,}43$ Liter

$V_{150} = \pi \cdot 30^2 \cdot 150 \approx 424115 \text{ cm}^3 = 424{,}12$ Liter

Antwort: Die Auswahl der Regentonne mit einer Höhe von 125 cm ist am sinnvollsten. Das Volumen ist annähernd 360 Liter. Die Tonne ist allerdings etwas kleiner, damit aber auch vermutlich günstiger als die große Regentonne. Das Volumen dieser Tonne wäre deutlich zu groß.

**Aufgabe 4**

Der Radius ist 30 cm.

Der Wasserverbrauch für 9 Tage beträgt $9 \cdot 60 = 540$ Liter $= 540\,000 \text{ cm}^3$

$$
\begin{aligned}
& 540\,000 = \pi \cdot 30^2 \cdot h \\
\Leftrightarrow\ & 540\,000 = \pi \cdot 900 \cdot h \quad |:900 \\
\Leftrightarrow\ & 600 = \pi \cdot h \quad |:\pi \\
\Leftrightarrow\ & 190{,}99 \approx h
\end{aligned}
$$

Die Regentonne müsste eine Höhe von ca. 191 cm haben.

## Lösungen (M 5)

**Analyse**

**Welche Frage wollen Michael und Gabriela beantworten?**

Wie teuer wird die zylinderförmige Verpackung für die Trinkflasche?

**Welche Informationen haben sie dazu zur Verfügung?**

Zylinderform, Höhe 21,5 cm, Durchmesser 7 cm

Zylinder ist geschlossen

Materialkosten 5,50 € pro $m^2$

Maximale Kosten: 0,50 €

**Was müssen die beiden genau berechnen (mathematische Formulierung)?**

Mit der Oberfläche des Zylinders kann der Materialbedarf bestimmt werden. Damit können dann die Materialkosten ausgerechnet werden.

**Aufgabe 1**

Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://geogebra.org/m/jckccs5e

Hier die Beispiellösung als Bild (Achse und Ebene wurden in diesem Bild ausgeblendet):


**Tipp**: Um die Mantelfläche zu berechnen, ist es sinnvoll, sich den Kreisumfang anzeigen zu lassen.

**Aufgabe 2**

Die Oberfläche besteht aus den beiden Kreisflächen und der Mantelfläche. Die Kreisflächen haben jeweils einen ungefähren Flächeninhalt von 38,5 $cm^2$. Die Mantelfläche hat einen Flächeninhalt von 21,5 cm · 22 cm = 473 $cm^2$. Insgesamt ergibt sich ein Flächeninhalt von 550 $cm^2$. Ein Quadratmeter sind 10 000 $cm^2$. Daher folgt für die Kosten:

$$\frac{550\ cm^2}{10000\ cm^2} \cdot 5{,}50\ € = 0{,}3025\ €$$

Die Kosten liegen deutlich unterhalb der Grenze von 0,50 €.

**Aufgabe 3**

a) Seitenlängen Mantelfläche sind: h und $2 \cdot \pi \cdot r$. Die zweite Seitenlänge ergibt sich dabei aus dem Umfang der Grundfläche. Damit kann der Flächeninhalt der Mantelfläche berechnet werden mit $(2\pi \cdot r) \cdot h$. Zusammen mit dem Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$ der beiden Grundflächen erhält man die Formel zur Berechnung der Oberfläche
$O = 2 \cdot (\pi \cdot r^2) + (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h$

b) Materialverbrauch:
$O = 2 \cdot (\pi \cdot 3{,}5^2) + (2 \cdot \pi \cdot 3{,}5) \cdot 21{,}5 \approx 549{,}8\ cm^2$
Materialkosten:
$$\frac{549{,}8}{10000} \cdot 5{,}50\ € \approx 0{,}30\ €$$

c) Die geschätzte Oberfläche aus Aufgabe 2 und die exakt berechnete Oberfläche stimmen fast überein. Der Unterschied sind 0,2 $cm^2$. Diesen Unterschied kann man durch die gerundete Angabe der Flächeninhalte der Grundflächen in GeoGebra 3D erklären.

d)

| **Oberfläche eines Zylinders** |
|---|
| Die Oberfläche eines Zylinders besteht aus zwei Kreisflächen und einer rechteckigen Mantelfläche. Addiert man diese Flächeninhalte, so hat man die gesamte Oberfläche des Zylinders berechnet.<br>Formel für die Kreisfläche: $\pi \cdot r^2$ Formel für die Mantelfläche: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ |

**Aufgabe 4**

Beispiellösung in GeoGebra 3D im Zusatzmaterial zum Download oder abrufbar unter https://www.geogebra.org/m/t7rccrbe

Für den Deckel müssen einige Annahmen getroffen werden, z. B. Durchmesser = 3,6 cm und Höhe = 1,5 cm. Der Durchmesser sollte etwas größer sein als der Durchmesser der Flasche.

Zur Berechnung der Materialkosten muss berücksichtigt werden, dass es sich um nach oben offene Zylinder handelt. D. h., die Oberfläche ergibt sich jeweils aus der Formel:

$$\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$$

Oberfläche großer Zylinder:

$$\pi \cdot (3{,}5\ \text{cm})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5\ \text{cm} \cdot 21{,}5\ \text{cm} \approx 511{,}3\ \text{cm}^2$$

Oberfläche kleiner Zylinder (Deckel):

$$\pi \cdot (3{,}6\ \text{cm})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6\ \text{cm} \cdot 1{,}5\ \text{cm} \approx 74{,}6\text{cm}^2$$

Oberfläche insgesamt:

$$511{,}3\ \text{cm}^2 + 74{,}6\ \text{cm}^2 = 585{,}9\ \text{cm}^2$$

Materialkosten:

$$\frac{585{,}9\ \text{cm}^2}{10000\ \text{cm}^2} \cdot 5{,}50\ € = 0{,}32\ €$$

Berücksichtigt man den Deckel, so liegen die Materialkosten um etwa 2 ct höher und betragen insgesamt 0,32 €.

## Lösungen (M 6)

**Aufgabe 1**

a) Beispielhaft wurde hier ein Feuerlöscher genommen. Er ist annähernd zylinderförmig.

b) Das erstellte Modell in GeoGebra 3D ist im Zusatzmaterial zum Download zu finden.

c)

Laut Herstellerangabe hat er ein Volumen von 6 Litern. Die App zeigt ein Volumen von 12 607 $cm^3$ = 12,6 Liter an. In der Algebra-Ansicht erkennt man, dass der Zylinder eine Höhe von 47,6 cm hat und der Umfang 57,67 cm beträgt. Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von 264,64 $cm^2$.
Damit ist die gesamte Oberfläche ungefähr

$$2 \cdot 264{,}64\ cm^2 + 47{,}6\ cm \cdot 57{,}67\ cm = 3274{,}37\ cm^2$$

**Aufgabe 2**

Der Feuerlöscher hat einen Durchmesser von 16 cm und eine Höhe von 40 cm.

Berechnung des Volumens: $V = \pi \cdot \left(\frac{16\ cm}{2}\right)^2 \cdot 40\ cm = 8042{,}5\ cm^3$

Berechnung der Oberfläche: $O = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{16\ cm}{2}\right) \cdot 40\ cm + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{16\ cm}{2}\right)^2 \approx 2412{,}74\ cm^2$

**Aufgabe 3**

Das rechnerische Ergebnis, die Herstellerangabe und das Ergebnis von GeoGebra 3D weichen deutlich voneinander ab. Dass die Herstellerangabe des Volumens deutlich kleiner ist, kann daran liegen, dass der Feuerlöscher aus technischen Gründen nicht vollständig befüllt ist.
Die Abweichung zwischen GeoGebra 3D und der rechnerischen Lösung kann an Problemen bei der Skalierung des Koordinatensystems liegen. Es war leider nicht ganz möglich, das Koordinatensystem passend zu skalieren. Legt man Koordinatensystem und Lineal übereinander, so entspricht ein cm ungefähr 1,5 LE des Koordinatensystems, sodass die Ergebnisse aus GeoGebra 3D um etwa 50 % größer sein müssten als die rechnerischen Werte. Kontrolle:

$\frac{12607}{8042{,}5} \approx 1{,}57$ und $\frac{3274{,}37}{2412{,}74} \approx 1{,}36$

Damit kann die Skalierung des Koordinatensystems einen großen Teil der Ungenauigkeiten erklären.

## Lösungen (M 7)

**Aufgabe 1**

Ein Zylinder ist ein geometrischer Körper. Er besteht aus zwei parallel gegenüberliegenden Kreisflächen und einer rechteckigen Mantelfläche. Das Volumen eines Zylinders berechnet man, indem der Radius der Grundfläche mit der Höhe des Zylinders multipliziert wird. Bezeichnet man mit r den Radius der Grundfläche, dann kann der Flächeninhalt der Grundfläche mit der Formel $\pi \cdot r^2$ berechnet werden. Die Formel für das **Volumen** des Zylinders lautet damit: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Um die Oberfläche eines Zylinders zu berechnen, braucht man die Angabe der Höhe und des Radius. Die Oberfläche besteht aus zwei Kreisflächen und der rechteckigen Mantelfläche. Den Inhalt einer Kreisfläche berechnet man mit der Formel $\pi \cdot r^2$und den Inhalt der Mantelfläche mit der Formel $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$. Addiert man diese Formeln, so erhält man die Formel für die **Oberfläche**
$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$

**Aufgabe 2**

$V = \pi \cdot \left(\frac{73}{2}\right)^2 \cdot 58 \approx 242752{,}44\ mm^3 = 242{,}752\ cm^3 = 242{,}75\ ml = 0{,}24275\ l$

Das Volumen der Konservendose beträgt 242,75 ml.

**Aufgabe 3**

$O = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{73}{2}\right) \cdot 58 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{73}{2}\right)^2 \approx 21672{,}3\ mm^2 = 216{,}723\ cm^2$

Gewicht: $\frac{15\ g}{100\ cm^2} \cdot 216{,}723\ cm^2 \approx 32{,}51\ g$

Die Dose wiegt ungefähr 32,5 g.

**Aufgabe 4**

1 Liter = 1 $dm^3$ = 1000 $cm^3$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow\ 1000\ cm^3 = \pi \cdot \left(\frac{10\ cm}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow\ 1000\ cm^3 = \pi \cdot 25\ cm^2 \cdot h \qquad \Big|:\left(25\ cm^2 \cdot \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 12{,}73\ cm = h$$

Die Höhe beträgt 12,73 cm.

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(r + h\right) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{10\ cm}{2}\right) \cdot \left(\frac{10\ cm}{2} + 12{,}73\ cm\right) \approx 557\ cm^2$

Ohne Verschnitt werden 557 $cm^2$ Blech für die Herstellung der Dose benötigt.

RAAbits Online
@RAABE

# **Mehr Materialien** für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen

## Testen Sie RAAbits Online 14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de


RAAbits Online – Das Portal für Unterrichtsmaterialien und Schulorganisation