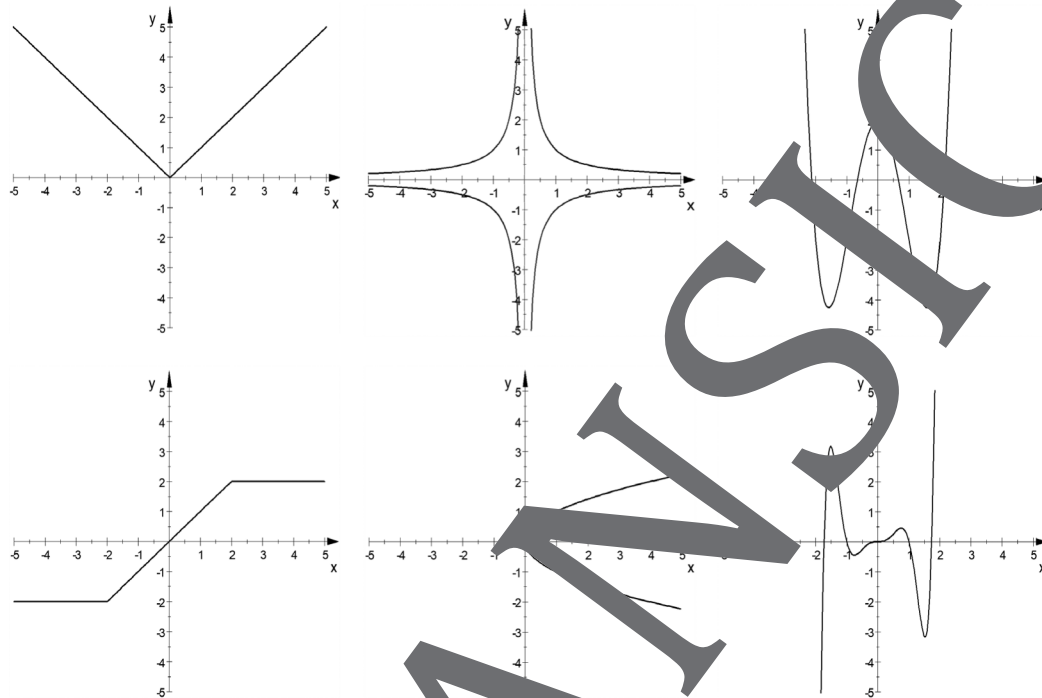


II.A.51

Analysis

Einführung in die Analysis

Kerstin Langer



Grafik: Kerstin Langer

Mit dieser Einheit können Sie direkt in den Mathematikunterricht der Oberstufe einsteigen. Mit diesem Material gelingt Ihnen der perfekte Übergang von der Mittelstufe zur Oberstufenmathematik. Ihre Lernenden frischen ihr Wissen über Funktionen auf und erwerben gleichzeitig ein kompaktes Nachschlagewerk für die kommenden Jahre. So starten Sie und Ihre Klasse optimal vorbereitet in die Welt der Analysis.

KOMPETENZPROFIL

Klassensstufe: Klasse II

Dauer: 12 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)

Kompetenzen: mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)
Lösen von Gleichungen; Zeichnen von Funktionsgraphen; Schnittpunktbestimmung von Funktionsgraphen; Symmetrie; Monotonieverhalten

Didaktisch-methodische Hinweise

Zu Beginn der Oberstufe werden die Lerngruppen neu zusammengesetzt, so dass eine große Heterogenität bezüglich des Vorwissens vorliegt. Diese Unterrichtseinheit ist geeignet, alle Lernenden auf einen Stand zu bringen und grundlegende Formalia wie Schreibweisen gleich zu Beginn einheitlich festzulegen. Dabei greifen Ihre Lernenden auf bekannte Verfahren z. B. zum Zeichnen von Funktionsgraphen oder Lösen von Gleichungen zurück und wiederholen, vertiefen und erweitern diese gegebenenfalls.

Diese Unterrichtseinheit bietet Ihren Lernenden zum Start in die Oberstufenmathematik ein Nachschlagewerk zu den wichtigsten Analysis-Themen aus der Mittelstufe. Sie können diese nach Bedarf und der zur Verfügung stehenden Zeit der Lerngruppe zum eigenständigen Durcharbeiten ausgeben oder die einzelnen Kapitel im Unterricht besprechen. Für alle Abschnitte gibt es konkrete Beispiele mit einer ausführlichen, kommentierten Rechnung. Die Aufgaben sind so gewählt, dass kein Taschenrechner erforderlich ist, daher sollten die Lernenden ihn auch nicht verwenden.

Um was geht es inhaltlich?

Die Unterrichtseinheit trägt die wichtigsten Analysis-Kapitel aus der Mittelstufe zusammen und bildet den Einstieg in die Oberstufenmathematik.

Enthalten sind folgende Themen:

- Funktionsbegriff
- Klassifizierung von Funktionen
- Darstellung von Funktionen durch Wertetabellen und Funktionsgraphen
- Schnittpunktbestimmung von Funktionsgraphen mit den Achsen sowie von Funktionsgraphen untereinander
- Symmetrie
- Monotonie

Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?

Den **Einstieg** in diese Unterrichtseinheit bildet die Auseinandersetzung mit dem Vorwissen aus der Mittelstufe in **M 1**. Dabei geht es nicht nur um die Abfrage des reinen Fachwissens, sondern auch um eine Selbsteinschätzung, was sicher die Lernenden sich gefühlt haben.

Es folgen die einzelnen Kapitel in enevoller Reihenfolge, die je nach Schwerpunktsetzung oder aktuellen Bedarf auch übersprungen werden können.

Die Klärung des Funktionsbegriffs in **M 2** legt die Grundlage für die weitere Arbeit. Oft wissen die Lernenden nur, dass Funktionen „irgendwas mit f sind“. Hier wird eine Funktion anschaulich beschrieben und die verschiedenen Schreibweisen erläutert. Zur Festigung dienen die Aufgaben in **M 3**. Danach bietet **M 4** eine Übersicht über wichtige Funktionsklassen, von denen die meisten bekannt sein sollten.

Die Darstellung von Funktionen in **M 5** beginnt allgemein mit dem Zeichnen von Funktionsgraphen mithilfe von Wertetabellen. Zur Festigung gibt es weitere Aufgaben in **M 6**. Auf die Besonderheiten beim Zeichnen von Geraden und Parabeln gehen **M 7** und **M 8** ein.

Das Kapitel der Schnittpunktbestimmung beginnt mit dem y -Achsenabschnitt in **M 9**. Einen großen Raum nimmt die Nullstellenberechnung in **M 10** ein, da Lernende regelmäßig an den in der Mittelstufe eingeführten Verfahren zur Lösung von Gleichungen scheitern. Dieses Kapitel greift daher noch einmal sämtliche wichtige Verfahren wie quadratische Ergänzung, Faktorisieren und Substitution auf. Es bietet sich an, alle Aufgaben mit Rechenweg durchzuarbeiten oder zumindest die Musterlösungen zur Verfügung zu stellen. Zu jeder Aufgabe ist der Funktionsgraph dargestellt,

Auf einen Blick

Planung für 12 Stunden

Einstieg

Thema: Selbsteinschätzung zum Wissensstand

M 1 Was wissen Sie noch aus der Mittelstufe?

Überblick und Übung

Thema: Funktionsbegriff und Klassifizierung

M 2 Der Funktionsbegriff im Überblick

M 3 Aufgaben zum Funktionsbegriff

M 4 Funktionen klassifizieren

Thema: Darstellung von Funktionen

M 5 Darstellung von Funktionen im Überblick

M 6 Aufgaben zu Darstellung von Funktionen

M 7 Zeichnen von Geraden

M 8 Zeichnen von Funktionen

Thema: Schnittpunktbestimmung

M 9 Schnittpunkte mit der y-Achse: y-Achsenabschnitt

M 10 Schnittpunkte mit der x-Achse: Nullstellen

M 11 Schnittpunkte von Funktionsgraphen im Überblick

M 12 Aufgaben zu Schnittpunkten von Funktionsgraphen

Thema: Eigenschaften von Funktionen

M 13 Eigenschaften von Funktionen: Symmetrie

M 14 Aufgaben zur Symmetrie

M 15 Eigenschaften von Funktionen: Monotonie

Lernerfolgskontrolle

M 16 Schriftliche Leistungskontrolle

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann geben Sie die Materialien (gegebenenfalls mit Lösungen) zum eigenständigen Arbeiten aus. In diesem Fall sollten Sie mindestens eine Stunde für die Klärung von Rückfragen einplanen.

Was wissen Sie noch aus der Mittelstufe?

M 1

Die folgenden Fragen umreißen die wichtigsten Aspekte aus der Mittelstufenmathematik, die Sie für eine erfolgreiche Mitarbeit in der Analysis der Oberstufe beherrschen müssen.

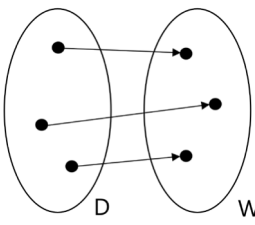
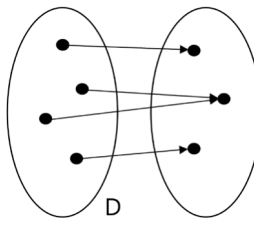
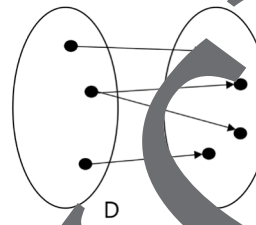
				
a) Was ist eine Funktion?				
b) Was versteht man unter Definitions- und Wertebereich einer Funktion?				
c) Was bedeutet die Schreibweise $f(3) = 8$?				
d) Was ist eine lineare Funktion?				
e) Wie sieht der Funktionsgraph einer linearen Funktion aus?				
f) Was ist eine quadratische Funktion?				
g) Wie sieht der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion aus?				
h) Wie stellt man eine Wertetabelle auf?				
i) Wie überprüft man, ob ein Punkt auf einem Funktionsgraphen liegt?				
j) Wie zeichnet man eine Gerade in ein Koordinatensystem, wenn die Geradengleichung gegeben ist?				
k) Was ist eine Parabel?				
l) Was ist ein y-Achsenabschnitt?				
m) Was versteht man unter einer Nullstelle?				
n) Wie berechnet man Nullstellen?				
o) Wofür steht man die pq-Formel?				

Der Funktionsbegriff im Überblick

Allgemeine Definition

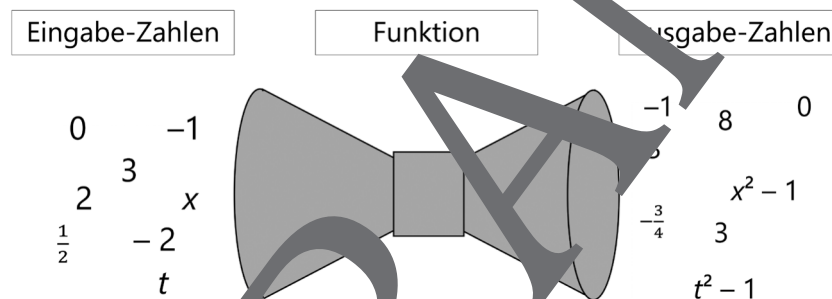
Eine Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus einer Menge D genau ein Element aus einer Menge W zuordnet.

D nennt man Definitionsbereich und W Wertebereich, dabei handelt es sich meist um die reellen Zahlen oder Teilmengen davon.

 Grafik: Kerstin Langer	 Grafik: Kerstin Langer	 Grafik: Kerstin Langer
Funktion (jedem Element aus D wird genau ein Element aus W zugeordnet)	Funktion (jedem Element aus D wird genau ein Element aus W zugeordnet)	Keine Funktion (einem Element aus D werden zwei Elemente aus W zugeordnet)

Anschauliche Vorstellung einer Funktion

Wir können uns eine Funktion als eine Eingabe-Ausgabe-Maschine vorstellen, die nach bestimmten Regeln aus jeder Eingabe-Zahl eine Ausgabe-Zahl macht.



Grafik: Kerstin Langer

Regel: Diese Eingangsquadrat und subtrahiert dann 1.

Schreibweisen

$f: x \mapsto x^2 - 1$ (Zuordnungsvorschrift) „Die Funktion f ordnet jeder Zahl x die Zahl $x^2 - 1$ zu.“

$f(x) = x^2 - 1$ (Funktionsgleichung) „ f von x ist gleich $x^2 - 1$.“

$f(3) = 8$ „Der Funktionswert von f an der Stelle 3 ist gleich 8.“

Wichtige Hinweise

- Die Funktion muss nicht immer f heißen. Es gibt auch $g, h, K, A, s, v, \dots$
- Man kann von der Eingangs-Zahl auf die Ausgangs-Zahl schließen. Die Umkehrung gilt nicht, man kann also von der Ausgangszahl nicht immer auf die Eingangszahl schließen.

Beispiel: Eingabe-Zahl e , Ausgabe-Zahl 3, Funktion $f(x) = x^2 - 1$

$$f(e) = e^2 - 1 = 3 \Rightarrow e^2 = 4 \Rightarrow e = 2 \vee e = -2$$

M 3

Aufgaben zum Funktionsbegriff

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Beispielen um eine Funktion handelt, und begründen Sie Ihre Entscheidung:

- Jedem Menschen wird eine Körpergröße zugeordnet.
- Jedem Rechteck mit einem Flächeninhalt von 24 cm^2 wird eine Seitenlänge zugeordnet.
- Jedem Artikel im Supermarkt wird ein Preis zugeordnet.
- Jeder Note in der Matheklausur wird eine Punktzahl zugeordnet.
- Jedem WhatsApp-Account wird eine Telefonnummer zugeordnet.
- Jeder natürlichen Zahl wird die Anzahl ihrer Teiler zugeordnet.

Aufgabe 2

Erklären Sie in mathematischer Sprache, was eine Funktion ist.

Aufgabe 3

Beschreiben Sie ein anschauliches Beispiel, wie man sich eine Funktion vorstellen kann.

Aufgabe 4

Formulieren Sie in mathematischer Kurzschreibweise:

- Die Funktion f ordnet der Zahl 3 die Zahl 10 zu.
- Die Funktion g nimmt an der Stelle 5 den Funktionswert 12 an.
- An der Stelle 3 beträgt der Funktionswert von h 7.
- Der Funktionswert der Funktion m an der Stelle 4 beträgt 0.
- An der Stelle 1 nimmt die Funktion n den Wert -4 an.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

- Schreiben Sie die Funktionsgleichung als Zuordnungsvorschrift.
- Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen 1, 0 und 3.
- Berechnen Sie $f(-2)$, $f(-1)$ und $f(2)$.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 4x - 3$.

- Schreiben Sie die Funktionsgleichung als Zuordnungsvorschrift.
- Berechnen Sie $g(0)$ und $g(-5)$.
- Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion g den Funktionswert 1 annimmt.
- Berechnen Sie die Stelle, an der der Funktionswert der Funktion g 5 beträgt.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion $h(t) = t^2 - 2t + 16$.

Berechnen Sie $h(0)$, $h(2)$ und $h(-1)$.

M 5

Darstellung von Funktionen im Überblick

Funktionen werden oft mit Hilfe ihres Funktionsgraphen dargestellt, manchmal reicht aber auch eine Wertetabelle aus.

**Wertetabelle**

Um sich einen groben Überblick über die Wirkung einer Funktion zu verschaffen, beispielsweise an welchen Stellen ein bestimmter Funktionswert angenommen wird, kann man eine Wertetabelle aufstellen. Jede Funktion lässt sich mit Hilfe einer Wertetabelle darstellen. Bei Erstellung dieser Wertetabelle wählt man sich eine geeignete Anzahl von x -Werten und berechnet mit Hilfe des Funktionsterms die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$.

Beispiel:

Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Für seine Höhe $h(t)$ (in m) zum Zeitpunkt t (in s) gilt $h(t) = 15t - 3t^2$. Nach welcher Zeit hat der Ball seinen höchsten Punkt erreicht?

t in s	0	1	2	3	4	5
$h(t)$ in m	0	12	18	15	12	0

Ein genaueres Ergebnis lässt sich mit unserer Wertetabelle nicht erreichen. Wir müssten Zwischenwerte berechnen oder ein anderes Verfahren zur Lösung der Aufgabe wählen.

Funktionsgraphen

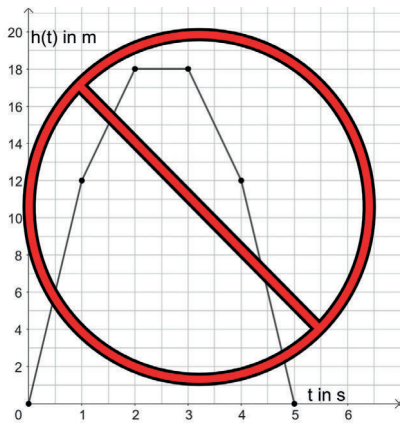
Unsere Zeichenebene besteht aus unendlich vielen Punkten $P(x_p|y_p)$, die durch ihre Koordinaten angegeben werden können. Jedes Zahlenpaar $(x|f(x))$ einer Funktion f (z. B. aus der Wertetabelle) kann als Punkt gezeichnet werden.

Der Funktionsgraph G_f einer Funktion f ist die Menge aller Punkte $(x|y)$ mit $y = f(x)$.

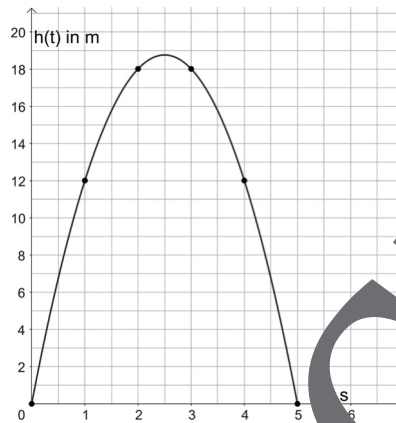
Die Funktionsgraphen, mit denen wir es zu tun haben, bestehen meist aus unendlich vielen Punkten.



Beispielfortsetzung:



Grafik: Kerstin Langer



Grafik: Kerstin Langer

Hinweis:

Die Genauigkeit der Zeichnung hängt von der gewählten Schrittweite ab. Wenn uns wichtige Merkmale verloren, so dass wir nur einen ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen erhalten. Das gilt insbesondere, wenn wir die Punkte mit dem Lineal statt per Hand verbinden. Wir werden später Verfahren kennenlernen, um diese charakteristischen Punkte zu ermitteln.

Beispiel:

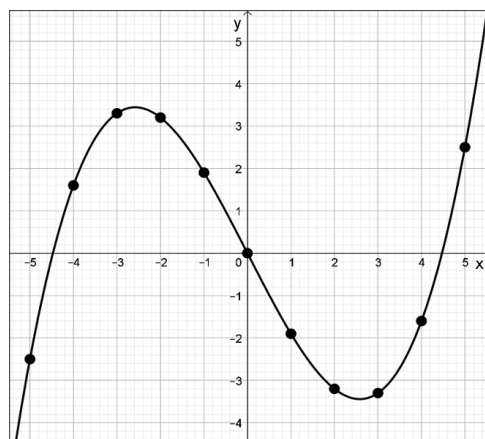
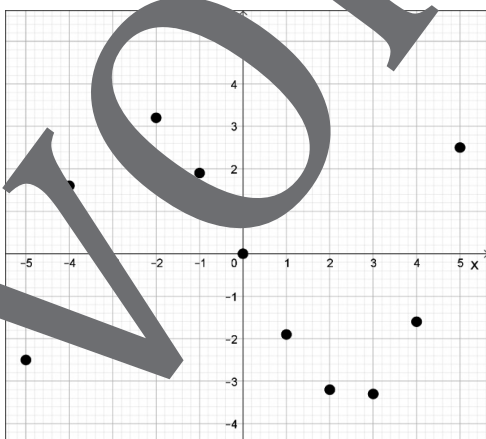
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,1x^3 - 2x$ im Intervall $[-5; 5]$.

Zuerst wird die Wertetabelle aufgestellt. Hier wurde die Schrittweite 1 gewählt.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2,5	1,6	3,3	3,2	1,9	0	-1,9	-3,2	-3,3	-1,6	2,5

Im nächsten Schritt wird das Koordinatensystem gezeichnet. Der Bereich auf der x -Achse ergibt sich durch die Aufgabenstellung, der Bereich auf der y -Achse aus der Wertetabelle.

Danach werden die Punkte eingezeichnet und per Hand verbunden.



Punkte auf dem Funktionsgraphen

Fall 1:	$P(x_p ?)$ liegt auf dem Funktionsgraphen. Gesucht ist die y-Koordinate. Zu berechnen ist $y_p = f(x_p)$. Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Bestimmen Sie die y-Koordinate von $P(3 ?)$. $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = 9 - 6 + 5 = 8$ $P(3 8)$
Fall 2:	$P(? y_p)$ liegt auf dem Funktionsgraphen. Gesucht ist die x-Koordinate. Zu berechnen ist x_p aus $y_p = f(x_p)$. Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Bestimmen Sie die x-Koordinate von $P(? 9)$. $f(x) = x^2 - 4x + 4 = 9$ $(x - 2)^2 = 9$ $ x - 2 = 3$ $x - 2 = 3 \quad \vee \quad x - 2 = -3$ $x = 5 \quad \vee \quad x = -1$ $P_1(5 9)$ $P_2(-1 9)$
Fall 3:	Liegt $P(x_p y_p)$ auf dem Funktionsgraphen? Zu überprüfen ist, ob $f(x_p) = y_p$ Beispiel: $f(x) = 3x - 2$. Liegen $P(2 4)$ und $Q(3 8)$ auf G_f? $f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4 = y_p \Rightarrow P \text{ liegt auf } G_f$ $f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7 \neq 8 \Rightarrow Q \text{ liegt nicht auf } G_f$

Zeichnen von Parabeln

M 8

Für das Zeichnen von Parabeln (Funktionsgraph einer quadratischen Funktion) gibt es ebenfalls eine Alternative zu einer normalen Wertetabelle. Diese sorgt dafür, dass wir den charakteristischen Punkt der Parabel, den Scheitelpunkt, richtig einzeichnen.

Zur Erinnerung: Aus der Mittelstufe kennen wir Parabelgleichungen

$$y = a(x - d)^2 + e \quad \text{bzw.} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

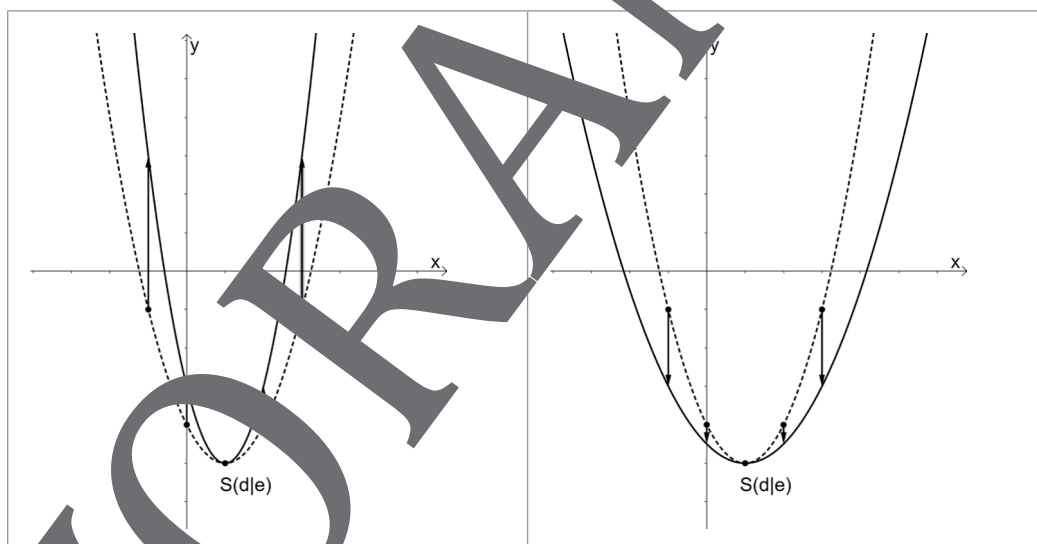
Scheitelpunktform Normalform

Dabei haben die Koeffizienten folgende Bedeutung:

- a: Streckfaktor
 - $|a| > 1$ Parabel gestreckt
 - $0 < |a| < 1$ Parabel gestaucht
 - $a < 0$ Parabel nach unten geöffnet
- c: y -Achsenabschnitt
- d: x -Koordinate des Scheitelpunkts
- e: y -Koordinate des Scheitelpunkts

Liegt die Parabelgleichung in Scheitelpunktform vor, so kann man direkt mit dem Zeichnen loslegen. Liegt sie in der Normalform vor, muss man zunächst in die Scheitelpunktform umformen. Dafür verwendet man die quadratische Ergänzung.

In der Scheitelpunktform kann man den Scheitelpunkt direkt ablesen: $S(d|e)$. Diesen zeichnet man als erstes ein und in Gedanken (oder als Hilfslinie) die (verschobene) Normalparabel. Von dieser geht man aus und zeichnet die ganzzahligen Punkte ein. Diese werden im Anschluss per Hand verbunden.

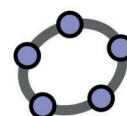


Aufgabe

Zeichnen Sie folgende Parabeln in ein Koordinatensystem.

Kontrollieren Sie Ihre Lösung selbstständig mithilfe von GeoGebra.

$g(x) = 2x^2 - 5$	$h(x) = -3x^2 + 4$	$k(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
$l(x) = (x - 2)^2 - 3$	$m(x) = -(x + 3)^2 + 2$	$n(x) = 3(x + 4)^2 - 5$



M 9

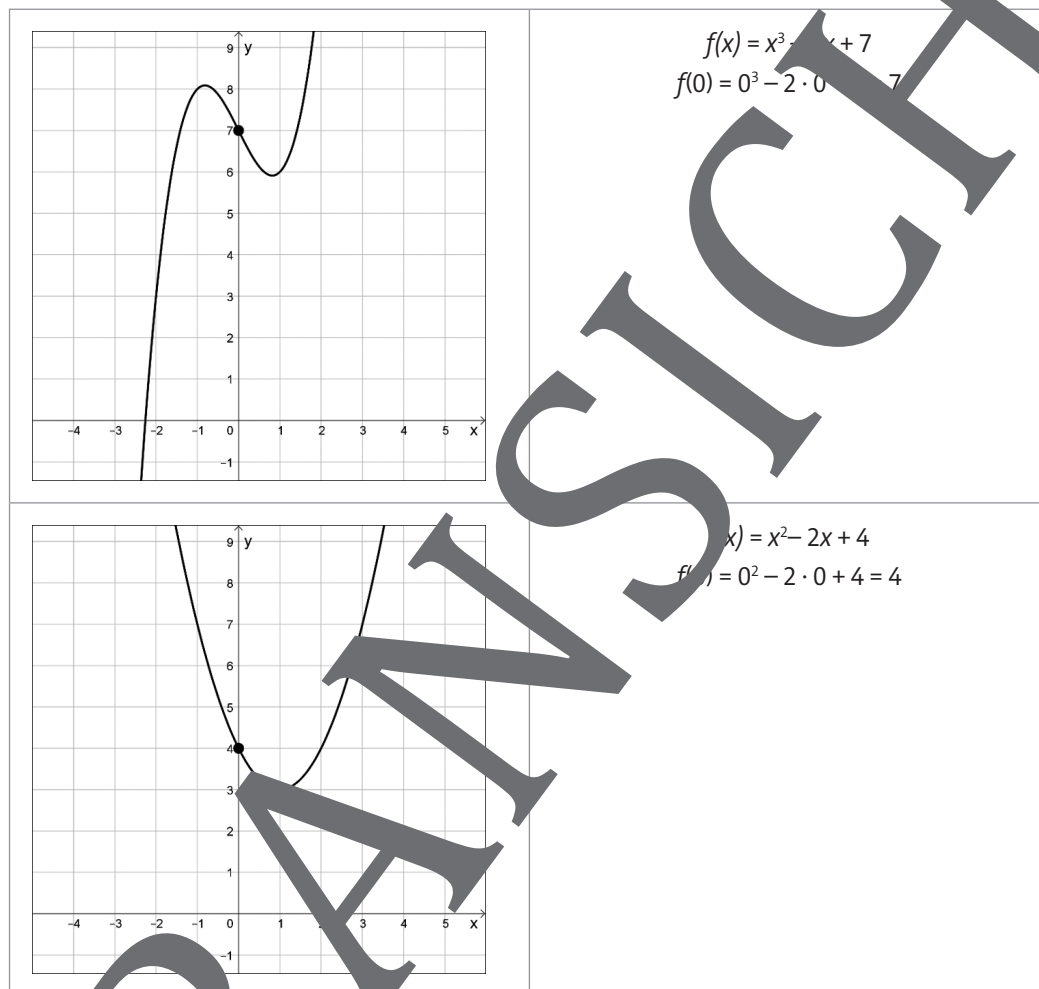
Schnittpunkte mit der y -Achse: y -Achsenabschnitt

Zur Bestimmung des y -Achsenabschnitts b betrachtet man f an der Stelle $x = 0$:

$$f(0) = b$$

Anschaulich gesehen ist das der Schnittpunkt mit der y -Achse. Dieser hat die x -Koordinate 0.

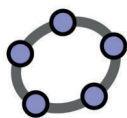
Beispiele:



Aufgabe

Bestimmen Sie den y -Achsenabschnitt von f . Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit GeoGebra.

- a) $f(x) = x^3 - 2x + 7$
- b) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$
- c) $f(x) = x^4 - x^2 - 3x$



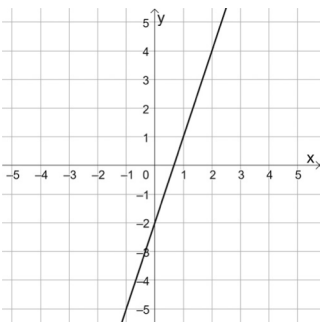
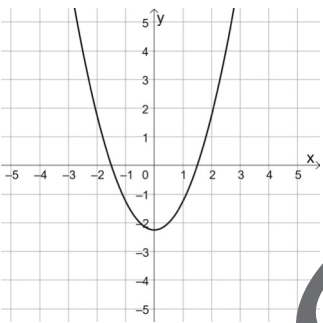
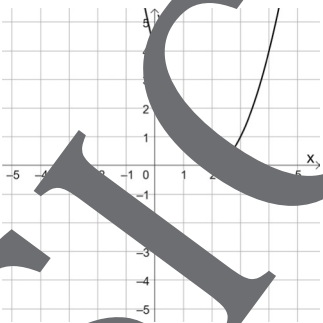
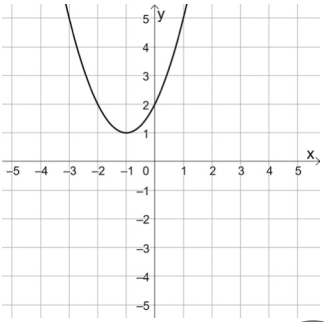
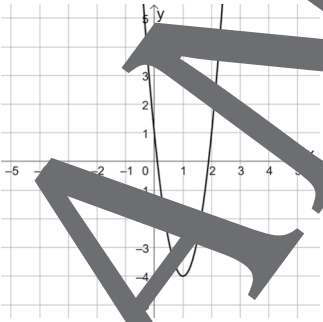
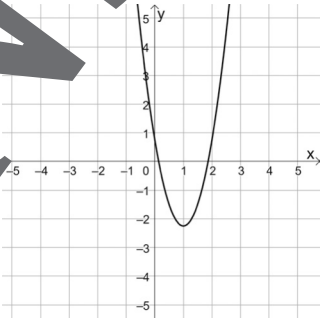
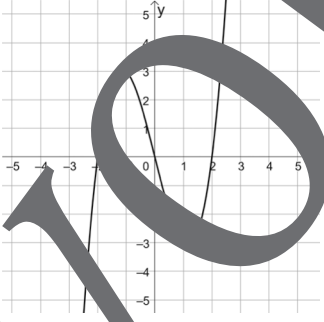
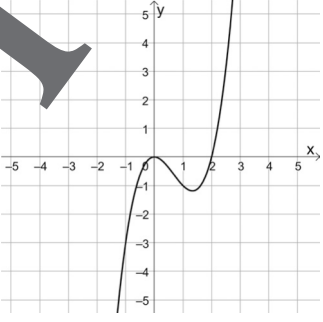
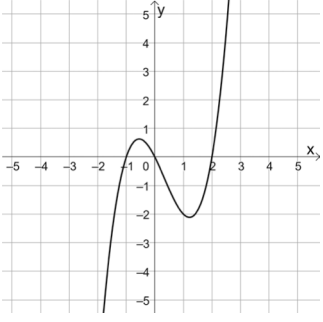
Schnittpunkte mit der x -Achse: Nullstellen

M 10

Wenn wir die Nullstellen einer Funktion f berechnen, suchen wir die Werte für x , für die $f(x) = 0$ ist. Anschaulich bedeutet das, dass wir die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x -Achse suchen. Das sind alle Punkte, die als y -Koordinate 0 haben z. B. $N(x|0)$.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Nullstellen für die gegebenen Funktionen und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den zugehörigen Funktionsgraphen.

		
$f(x) = 3x - 2$	$f(x) = x^2 - 2$	$f(x) = x^2 - 4x + 4$
		
$f(x) = x^2 + 2x$	$f(x) = 5(x - 1)^2 - 4$	$f(x) = 3x^2 - 6x + \frac{3}{4}$
		
$f(x) = x^2 - 4x$	$f(x) = x^3 - 2x^2$	$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

M 12

Aufgaben zu Schnittpunkten von Funktionsgraphen

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die Geraden sich schneiden, parallel oder identisch sind. Geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

- a) $g(x) = 2x + 3$; $h(x) = -x + 9$
- b) $g(x) = 5x - 3$; $h(x) = 5x + 3$
- c) $g(x) = -3x + 4$; $h(x) = 2x - 6$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob es sich bei der Geraden um eine Sekante, Tangente oder Passante bezüglich der Parabel handelt. Geben Sie gegebenenfalls die jeweiligen Schnittpunkte an.

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $g(x) = -x + 3$
- b) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = -2x + 6$
- c) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$; $g(x) = 2x - 1$
- d) $f(x) = 4x^2 + 8x + 16$; $g(x) = 4x - 4$

Aufgabe 3

Gesucht ist die Gleichung einer Sekante s durch den Funktionsgraphen von f mit $f(x) = x^2 - 4$ durch die Punkte $P(-2|0)$ und $Q(3|5)$. Schreiben Sie Ihren Lösungsweg kommentiert auf.

Aufgabe 4

Eine Sekante s mit der Steigung -1 schneidet den Funktionsgraphen von f mit $f(x) = 2x^2 + 3$ an der Stelle -1 . Bestimmen Sie den Schnittpunkt S mit G_f . Schreiben Sie Ihren Lösungsweg kommentiert auf.

Aufgabe 5

Gesucht ist die Gleichung einer Tangente t an die Parabel f mit $f(x) = (x + 2)^2 + 2$ an der Stelle -3 . Schreiben Sie Ihren Lösungsweg kommentiert auf.

Aufgabe 6

Gesucht ist die Gleichung einer Tangente t an die Parabel f mit $f(x) = x^2 - 1$ an der Stelle 2 . Schreiben Sie Ihren Lösungsweg kommentiert auf.

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, ob sich zwei Funktionsgraphen keinen, einen oder zwei Schnittpunkte haben. Geben Sie gegebenenfalls die jeweiligen Schnittpunkte an.

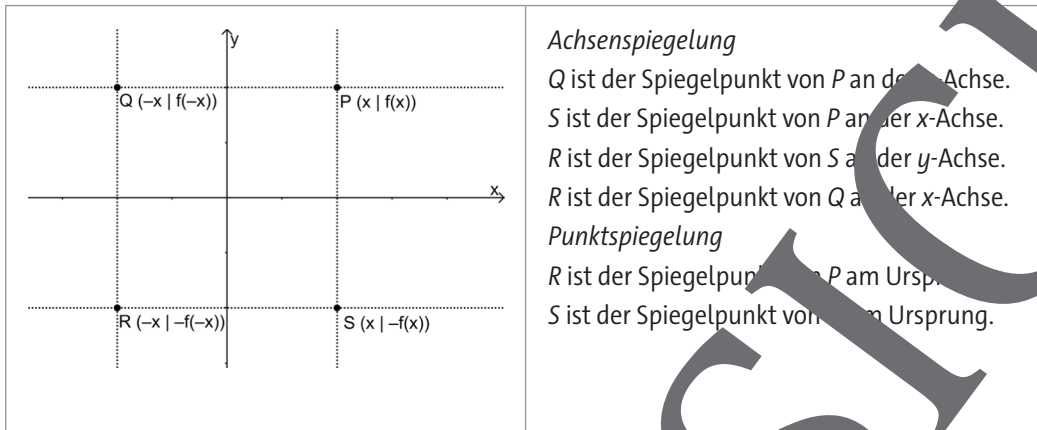
- a) $f(x) = x^2 - 4x - 3$; $g(x) = -x^2 + 4x - 3$
- b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $g(x) = -x^2 + 3x$
- c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$; $g(x) = x^2 - 6x + 8$
- d) $f(x) = -4x + 4$; $g(x) = -x^2 + 8x - 12$
- e) $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $g(x) = x^2 - 4x + 10$
- f) $f(x) = -5(x - 8)^2 + 18$; $g(x) = x^2 - 2x + 5$

Eigenschaften von Funktionen: Symmetrie

M 13

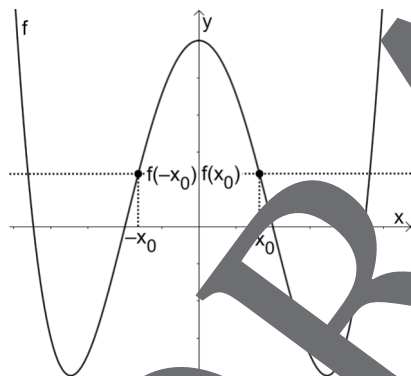
Aus der Mittelstufe kennen wir Achsensymmetrie und Punktsymmetrie im Zusammenhang mit geometrischen Figuren. Beide lassen sich auch auf Funktionsgraphen anwenden und werden uns eine ganze Weile beschäftigen ...

Vorüberlegung: Spiegelung von Punkten an den Koordinatenachsen



Achsensymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y -Achse, falls
 $f(-x) = f(x)$



Rechnerische Überprüfung am Beispiel

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = f(-x), \text{achsensymmetrisch}$$

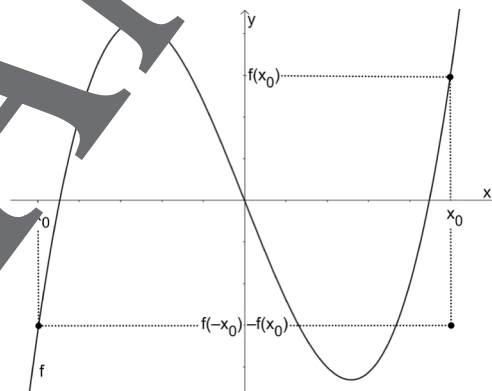
$$f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 3 = -x^3 + x^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(-x), \text{nicht achsensymmetrisch}$$

Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls
 $f(-x) = -f(x)$



Rechnerische Überprüfung am Beispiel

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -x^3 + 2x$$

$$-f(x) = -(x^3 - 2x) = -x^3 + 2x$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \text{punktsymmetrisch}$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 = -x^3 - 2x^2$$

$$-f(x) = -(x^3 - 2x^2) = -x^3 + 2x^2$$

$$\Rightarrow f(-x) \neq -f(x), \text{nicht punktsymmetrisch}$$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.

Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

