

UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II

Einmal Reise nach Karthago

Umgang mit Extremwerten

Mal langsam und mal schnell

Ableitungen in der Physik

Kosten und Gewinne

Aufgaben aus der Wirtschaft

Radfahren kinderleicht! – Krümmung und Wendepunkte

Das Krümmungsverhalten mithilfe der 2. Ableitung verstehen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eigenschaften dieser Funktionsfamilie

Polynom- und gebrochen-rationale Funktionen

Eine Checkliste

Und 12 weitere Beiträge

Eine Reise nach Karthago – Lösungsstrategien zum Umgang mit Extremwertproblemen

Hintergrund/Motivation

Extrem schwer – aber nicht mit Tipps!

Bereits in der SEK. I treffen Ihre Schüler auf Extremwertprobleme, die sie durch die Problemstrategie des Probierens zu lösen versuchen. Erst in der SEK. II wird ein **Verfahren zur systematischen Bearbeitung und Lösung von Extremwertaufgaben** vermittelt.

„Durch welche Abmessungen bekommt ein Landstück zum Karthago einen maximalen Flächeninhalt?“ ist nur eines von zahlreichen Anwendungsbeispielen.



Karthago: thinkstock/IS

Motivieren Sie Ihre Schüler durch Praxisaufgaben, die sie mithilfe von Tippkarten selber lösen können. Lassen Sie sie so das Lösen von Extremwertproblemen durchdringen und dann einüben.

1. Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen

Das historische Karthago war eine Großstadt in Nordafrika, nahe der heutigen Hauptstadt Tunesiens (Tunis). Der Gründungslegende zufolge wurde Karthago von der phönizischen Prinzessin Elissa, welche unter den Römern „Dido“ genannt wurde, erschlossen. Nach der Flucht vor ihrem tyrannischen Bruder landete sie an der afrikanischen Küste. Der ortsansässige Häuptling versprach ihr so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen können.



Quelle: WIKIMEDIA COMMONS/BishkekRo

Karthago: Ruinen der Antoninus-Pius-Thermen

Wie hätte Prinzessin Dido vorgehen können?

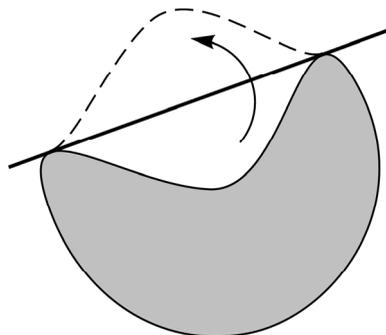
Welche ebene Figur hat bei gegebenem Umfang den größtmöglichen Flächeninhalt?

Tipp Verwenden Sie die isoperimetrische Ungleichung.

$$4\pi \cdot A \leq U^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für den Kreis

$$(U = 2\pi r, A = \pi r^2)$$



3. Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen

- 3.1 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 12 cm und 8 cm lang. Diesem Dreieck ist ein möglichst großes Rechteck einzuschreiben, von dem zwei Seiten auf den Katheten des Dreiecks liegen. Erarbeiten Sie eine Lösung mithilfe des folgenden Lösungsrasters.

Tip Erstellen Sie die Lösungsskizzen groß in Ihrem Heft.

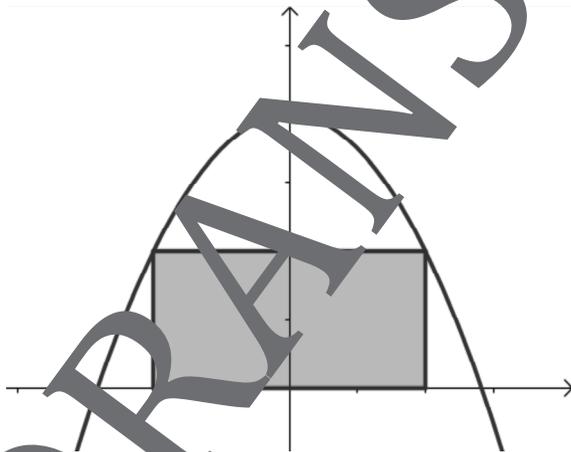
Methodischer Schritt	Lösungsskizze	Tip
<p>1. Vorbereitung</p> <p>Wählen Sie geeignete Variablen und fertigen Sie eine Skizze zum Sachverhalt an.</p>		<p>Geeignete Variablen wären z. B. x und y.</p>
<p>2. Hauptbedingung</p> <p>Bestimmen Sie eine Hauptbedingung.</p>		<p>Ziel ist zunächst, den Flächeninhalt eines Rechtecks zu berechnen.</p> <p>Formel: $A = x \cdot y$</p>
<p>3. Nebenbedingung</p> <p>Stellen Sie eine im gegebenen Kontext bezogene Nebenbedingung auf.</p>		<p>Was muss das Rechteck erfüllen? Es wird begrenzt durch das Dreieck mit den Seitenmaßen 8 cm und 12 cm. Stellen Sie jeweils ein Verhältnis zwischen den Katheten und den Seiten des Rechtecks her.</p>

4. Machen Sie sich fit im Umgang mit Extremwertaufgaben!

- 4.1 Um den sicheren Umgang mit Extremwertproblemen zu üben, können Sie bei folgenden Aufgaben zwischen vier unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen wählen.

Aufgabenkarte 1 – leicht

Das rechts abgebildete Rechteck soll einen maximalen Flächeninhalt bekommen. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die begrenzende Parabel gegeben ist durch $f(x) = -0,5x^2 + 4$.

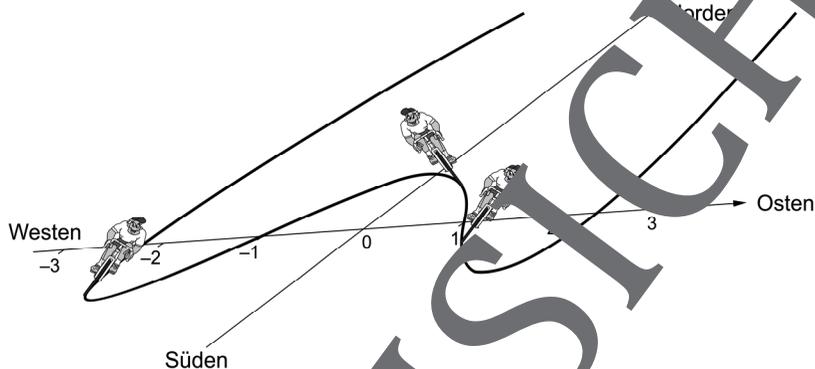


Aufgabenkarte 2 – mittelschwer

Die Zahl 30 soll so in zwei Summanden x und y zerlegt werden, dass das Produkt aus dem ersten Summanden und dem Quadrat des zweiten Summanden maximal wird.

Radfahren kinderleicht! – Krümmung und Wendepunkte

Auf die Perspektive kommt es an!



Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2 + 5)$

Betrachtet man den Graphen der gleichen Funktion wie in M 7 „von oben“, also etwa als „Radweg“ in einer Landkarte (rechts), dann kommt der Radler in einer Linkskurve von „Westen“ angefahren, muss sich im Wendepunkt $(-1|0)$ nach rechts legen, um in der folgenden Rechtskurve nicht zu stürzen, bis er beim anderen Wendepunkt $(1|0)$ wieder sein Gewicht auf die linke Seite verlagert, um die lang gezogenen Linkskurve zu meistern. Hier sind die beiden südlichsten Routenpunkte die Tiefpunkte $(+\sqrt{3} | -\frac{1}{3})$, der dazwischen (!) nördlichste ist der Hochpunkt $(0 | \frac{5}{12})$. Er stellt ein lokales Maximum dar, da links und rechts der Minima auch größere Werte erreicht werden („weiter im Norden“).

Krümmungsverhalten eines Graphen G_f :

Ist in einem Bereich $f''(x) > 0$ (positiv), dann verläuft der Graph dort als Links gekrümmt, also als Linkskurve.

Ist in einem Bereich $f''(x) < 0$ (negativ), dann verläuft der Graph dort als Rechts gekrümmt, also als Rechtskurve.

Ist an einer Stelle $f''(x) = 0$, dann liegt ein Punkt vor, an dem sich die Krümmungsrichtung möglicherweise ändert (sog. **Wendepunkt**).

Oft beschreibt man das Krümmungsverhalten mit einer Krümmungstabelle, in der die Bereiche zwischen den Nullstellen der zweiten Ableitung festgehalten werden.

Beachten Sie: Minima werden stets in einer Linkskurve durchlaufen, Maxima dagegen immer in einer Rechtskurve!

Bsp. von oben: $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (x^4 - 6x^2 + 5)$ mit $f''(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x$
Vorzeichen von $f''(x)$	+	-	+
Krümmung des Graphen von f	rechts	links	rechts

1. Untersuchen Sie mithilfe einer Krümmungstabelle auf Wendepunkte.

a) $g_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

b) $g_2(x) = x^5 - x^3 - 2x$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

