Fabrikation von Büroklammern

1 In einer Fabrik werden Büroklammern in sehr großer Stückzahl mit einer Ausschussquote von 5 % hergestellt.

1.1 Der laufenden Produktion werden 100 Büroklammern zu Kontrollzwecken entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

1.1.1 sind fünf oder sechs defekt;

1.1.2 sind mindestens zwei, aber höchstens 20 defekt;

1.1.3 sind mehr als erwartet defekt;

1.1.4 liegt die Anzahl der defekten Büroklammern im $1\cdot\sigma-$Bereich um den Erwartungswert, wenn σ die Standardabweichung ist?

1.2 Bei einem Großversuch werden 500 Büroklammern der laufenden Produktion entnommen und überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man

1.2.1 mehr als 30 defekte Büroklammern;

1.2.2 weniger defekte Büroklammern als erwartet?

1.3 Wie viele Büroklammern muss man der laufenden Produktion mindestens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens eine defekte Büroklammer zu erhalten?

1.4 Wie viele Büroklammern darf man der laufenden Produktion höchstens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 50 % keine defekte Büroklammer zu erhalten?

2 Der Produktionsleiter befürchtet, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit gestiegen ist. Er lässt zur Überprüfung eine Stichprobe von $n = 200$ Büroklammern entnehmen.

Wie groß muss die Anzahl der defekten Büroklammern in der Stichprobe mindestens sein, wenn man die ursprüngliche Annahme von $p = 5\,\%$ höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % irrtümlich verwerfen will?

3 Die Büroklammern werden in Schachteln zu 100 Stück verpackt. Pro Schachtel muss ein Abnehmer den vollen Preis bezahlen, wenn weniger als sieben defekte Büroklammern enthalten sind. Eine Schachtel kostet nur den halben Preis, wenn sie sieben bis zehn defekte Büroklammern enthält, ansonsten ist die Schachtel kostenfrei.

Wie muss die Herstellerfirma den Preis pro Schachtel festlegen, wenn sie im Durchschnitt 5 € pro Schachtel erzielen will?

Kompetenzprofil

- Niveau: vertiefend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen berechnen
- Modellierung: Näherung der Binomialverteilung nach Moivre-Laplace
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Binomialverteilungen, Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung nach Moivre-Laplace, Bestimmung der Entscheidungsregel bei einem Hypothesentest, Verwendung des Erwartungswertes

Autor: Alfred Müller, Coburg

Zusätzliche Mediendateien finden Sie auf www.archiv.raabe.de/mathe-stochastik im digitalen Ordner zu diesem Beitrag.

Lösung

1.1 Die Zufallsgröße Z, die die Anzahl der defekten Büroklammern angibt, ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,05. Es gilt:

Erwartungswert $\mu = E(Z) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}05 = 5$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(Z)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} \approx 2{,}18$$

Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten, die mithilfe der (kumulativen) Tabelle der Binomialverteilung bestimmt werden.

1.1.1 $B_{0,05}^{100}(5 \le Z \le 6) = B_{0,05}^{100}(Z=5) + B_{0,05}^{100}(Z=6)$

$$= 0{,}18002 + 0{,}15001 = 0{,}33003 = 33{,}00\ \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 33,00 % sind fünf oder sechs der Büroklammern defekt.

1.1.2 $B_{0,05}^{100}(2 \le Z \le 20) = B_{0,05}^{100}(Z \le 20) - B_{0,05}^{100}(Z \le 1)$

$$= 1 - 0{,}03708 = 096292 = 96{,}29\ \%$$