

Schwarze Schafe im Verkehr

1 Raser

Wegen einer Baustelle ist die Geschwindigkeit auf einer längeren Strecke eingeschränkt.

1.1 Die Polizei möchte den Anteil p der Fahrer feststellen, die mit überhöhter Geschwindigkeit an der Baustelle vorbeifahren. Wie groß muss diese Wahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit unter den nächsten zehn vorbeifahrenden Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eines dabei ist, das zu schnell fährt?

1.2 Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos beträgt 20 %, die Anzahl Z dieser Raser sei binomialverteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nächsten 50 vorbeifahrenden Autos

1.2.1 genau zehn zu schnell fahren;

1.2.2 das erste Auto zu schnell fährt;

1.2.3 nur das erste Auto zu schnell fährt;

1.2.4 mehr Autos als erwartet zu schnell fahren;

1.2.5 die ersten 25 nicht, dann aber noch zehn Autos zu schnell fahren;

1.2.6 das zehnte als erstes Auto zu schnell fährt.

1.3 Nach dem Aufbau einer Warntafel soll anhand einer Stichprobe der Größe $n = 100$ auf dem 5 %-Signifikanzniveau überprüft werden, ob eine Senkung des Anteils der zu schnell fahrenden Autos unter 20 % eingetreten ist.

1.3.1 Wie lautet die Entscheidungsregel?

1.3.2 Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos ist auf 10 % gesenkt worden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt man dies mit der Entscheidungsregel aus 1.3.1 nicht?

2 Alkoholsünder

Der Polizei ist bekannt, dass an den Wochenenden, besonders in der Nacht zum Sonntag, 10 % der Fahrer eines Kraftfahrzeugs die zulässige Promillegrenze überschreiten. Die Anzahl Z dieser Alkoholsünder genüge einer Binomialverteilung.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer solchen Nacht unter 50 Fahrern

2.1.1 genau fünf,

2.1.2 nicht mehr als fünf,

2.1.3 mindestens sieben,

2.1.4 weniger als drei Alkoholsünder zu finden sind.

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 20 beobachteten Fahrern

2.2.1 der erste Alkoholsünder im vorletzten oder letzten Auto fährt;

2.2.2 genau zwei Alkoholsünder gefunden werden, die in zwei aufeinanderfolgenden Autos fahren.

2.2.3 der erste Alkoholsünder spätestens im letzten Auto fährt.

2.3 Durch gegenseitige Anzeigen in den Tageszeitungen wird auf Alkoholkontrollen hingewiesen und man hofft, dadurch den Anteil der Alkoholsünder zu senken. Anhand einer Stichprobe der Größe $n = 100$ soll auf dem 5 %-Signifikanzniveau ermittelt werden, ob eine signifikante Absenkung der Zahl der Alkoholsünder eingetreten ist.

2.3.1 Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Test.

2.3.2 Die Quote der Alkoholsünder ist auf 5 % abgesunken. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt man dies mit dem Ergebnis aus 2.3.1 nicht?

2.3.3 Dem Vorschlag der Verkehrswacht, weitere solche Anzeigen zu schalten, wird von der Stadtverwaltung nur zugestimmt, wenn die Alkoholsünderquote deutlich unter 5 % gesenkt wird. Wie würde in diesem Fall auf dem 5 %-Signifikanzniveau zu entscheiden sein?

3 Handytelefonie

Im Folgenden wird die Anzahl Z der Handybenutzer betrachtet, die im Auto als Fahrer ohne Freisprecheinrichtung telefonieren. Diese Zufallsgröße sei binomialverteilt mit dem Parameter p .

- 3.1 Wie groß muss p mindestens sein, dass in 100 beobachteten Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens ein Fahrer mit dem Handy telefoniert?
- 3.2 Wie groß muss bei einem Anteil von $p = 3\%$ die Anzahl der beobachteten Autofahrer mindestens sein, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % wenigstens einen zu finden, der mit dem Handy telefoniert?
- 3.3 Bestimmen Sie für $p = 0,03$ die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse bei den beobachteten Autos:
 - A: „Bei zehn Autos telefonieren die ersten fünf Fahrer nicht, dann aber zwei.“
 - B: „Bei zehn Autos telefonieren der dritte und der sechste Fahrer mit dem Handy.“
 - C: „Das zehnte Auto ist das erste, in dem der Fahrer mit dem Handy telefoniert.“
 - D: „Früherstens das zehnte Auto ist das erste, in dem der Fahrer mit dem Handy telefoniert.“
 - E: „Spätestens das zehnte Auto ist das erste, in dem der Fahrer mit dem Handy telefoniert.“
- 3.4 Auf der Zufahrt zu einer Disko wird spätabends kontrolliert, da man weiß, dass dort die Telefonierwahrscheinlichkeit bei 20 % liegt.
 - 3.4.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man den ersten telefonierenden Autofahrer
 - bei der achten,
 - bei der zehnten,
 - nach der zehnten Kontrolle findet?
 - 3.4.2 Zeigen Sie, dass im Mittel erst beim fünften Auto der erste Handytelefonierer gefunden wird.

- 3.5 Die Polizei will verstärkte Kontrollen einführen, falls der Anteil der Fahrer, die mit dem Handy telefonieren, auf über 20 % angestiegen ist. Dazu werden 200 Autofahrer kontrolliert. Wie muss die Kontrolle ausfallen, um auf dem 5 %-Signifikanzniveau für verstärkte Kontrollen zu sein?
- 3.6 Obwohl 20 % der Fahrer angeben, ihr Handy während der Fahrt zu benutzen, ist bei Kontrollen der Anteil viel kleiner, da die Fahrer nicht dauernd telefonieren. Deshalb werden diese in die drei folgenden Kategorien mit den entsprechenden Zahlenwerten eingeteilt:

Kategorie	wenig	mittel	viel
Durchschnittliche Telefondauer in Minuten pro Stunde	3	10	30
Anteil der Fahrer	8 %	10 %	2 %

Ein Autofahrer wird kontrolliert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- 3.6.1 wird er beim Telefonieren erwischt, wenn er „wenig“ telefoniert;
- 3.6.2 telefoniert er;
- 3.6.3 telefoniert er, wenn man weiß, dass er zu den Telefonierern gehört?

4 Schwarzfahrer

Schwarzfahrer sind Fahrgäste, die keinen gültigen Fahrausweis besitzen. Aus Erfahrung ist bekannt, dass der Anteil der Schwarzfahrer unter allen Fahrgästen bei 3 % liegt und deren Anzahl Z als binomialverteilt vorausgesetzt werden kann.

- 4.1 Wie viele Fahrgäste müssen Kontrolleure mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einen Schwarzfahrer zu finden?
- 4.2 Ein Kontrolleur steigt in die Linie S_1 ein und kontrolliert alle 30 Fahrgäste. An der nächsten Haltestelle wechselt er in die Linie S_2 und kontrolliert dort weitere 20 Fahrgäste. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ermittelt der Kontrolleur
 - 4.2.1 insgesamt zwei Schwarzfahrer;
 - 4.2.2 mindestens einen Schwarzfahrer;
 - 4.2.3 jeweils einen Schwarzfahrer in S_1 und einen in S_2 ;
 - 4.2.4 genau zwei Schwarzfahrer in der Linie S_1 ;
 - 4.2.5 höchstens zwei Schwarzfahrer in der Linie S_2 ;
 - 4.2.6 den ersten Schwarzfahrer in der Linie S_2 ?
- 4.3 Jeder Schwarzfahrer verursacht dem Verkehrsbetrieb einen Einnahmeverlust von 3 €. Da nur 10 % der Schwarzfahrer erwischt werden, soll diesen ein Bußgeld auferlegt werden, sodass eine Kostendeckung für die Schwarzfahrer erfolgt.
Wie hoch muss dieses Bußgeld sein?
- 4.4 In einem Zeitungsartikel wird die Vermutung aufgestellt, dass der Anteil der Schwarzfahrer deutlich über 3 % gestiegen ist. Die Verkehrsbetriebe untersuchen dies an einer Stichprobe von $n=200$ Kontrollen. Untersuchen Sie auf dem 5%-Signifikanzniveau, ob die Nullhypothese $H_0: p_0 \leq 0,03$ bereits bei acht gefundenen Schwarzfahrern verworfen werden kann.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: argumentieren, begründen
- Problemlösen: Lösungen berechnen, vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Ereigniswahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bernoulli-Kette und Binomialverteilung, Signifikanztest

Autor: Alfred Müller, Coburg



Zusätzliche Mediendateien finden Sie auf www.archiv.raabe.de/mathe-stochastik im digitalen Ordner zu diesem Beitrag.

Lösung

1.1 $P(\text{mindestens ein } \dots) = 1 - P(\text{kein } \dots)$, d.h., es muss gelten:

$$1 - (1-p)^{10} > 0,90$$

$$(1-p)^{10} < 0,10$$

$$1-p < \sqrt[10]{0,10}$$

$$p > 1 - \sqrt[10]{0,10} = 0,20567$$

Der Anteil p muss mindestens 20,57 % betragen.

1.2.1 $B_{0,20}^{50}(Z=10) = 0,13982 = 13,98\%$

1.2.2 $P(\text{erstes Auto}) = 0,20$, d.h., alle Fahrer rasen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 20\%$.

1.2.3 $P(\text{nur das erste Auto}) = 0,2 \cdot 0,8^{49} = 3,6 \cdot 10^{-6} \approx 0$
(sehr unwahrscheinlich)

1.2.4 Es werden $n \cdot p = 50 \cdot 0,20 = 10$ Autos erwartet, die rasen.

$$B_{0,20}^{50}(Z > 10) = 1 - B_{0,20}^{50}(Z \leq 10) = 1 - 0,58356 = 0,41644 = 41,64\%$$

1.2.5 $P(E) = 0,8^{20} \cdot \binom{30}{10} \cdot 0,2^{10} \cdot 0,8^{20} = 0,0004 = 0,04\%$