

Spielereien mit der Tabellenkalkulation des Grafikrechners – TI-Nspire

Inhalt in Stichworten

Es erfolgt eine Einführung in die Arbeit mit einer Tabellenkalkulation am Beispiel des Grafikrechners TI-Nspire. Dabei geht es insbesondere um die Methode der relativen Adressierung.

Zunächst werden einfache und überschaubare Beispiele für Zahlenspielereien erstellt. Dabei spielt auch entdeckendes Lernen eine Rolle. Die Schülerinnen und Schüler werden angehalten, mathematisch zu kommunizieren. Sie erwerben an einfachen, aber auch zum Staunen Anlass gebenden Zahlenspielereien erste Einblicke in den Umgang mit einer Tabellenkalkulation, insbesondere in das Verfahren der relativen Adressierung. Durch Arbeitsaufträge werden sie animiert, entsprechende Anweisungen in die Rechnersprache umzusetzen bzw. mathematische Strukturen in Ergebnissen zu erkennen und zu formulieren. Das Angebot an Aufgaben ist umfangreich, sodass sich bei Bedarf auch differenzierte Aufträge erteilen lassen.

In einem zweiten Teil werden Zusammenhänge zwischen der relativen Häufigkeit von Ereignissen und dem Stichprobenumfang bei einfachsten zufälligen Prozessen (Münzwurf) untersucht. Dabei können die Schülerinnen und Schüler auf die beim Umgang mit den Zahlenspielereien erworbenen Kompetenzen zurückgreifen und sie durch einige neue Aspekte hinsichtlich der grafischen Darstellung ergänzen.

Als digitales Hilfsmittel wird hier auf den Grafikrechner TI-Nspire verwiesen. Die meisten Überlegungen lassen sich mit geringem Aufwand auch auf andere Tabellenkalkulationen übertragen.

Inhaltsübersicht

Arbeitsblatt 1	Eine Einführung in die Arbeit mit einer Tabellenkalkulation
Arbeitsblatt 2	Anwendungen der Tabellenkalkulation bei Zahlenspielereien
Arbeitsblatt 3	Tabellenkalkulation und Zahlenspielereien – Vertiefungen
Arbeitsblatt 4	Stabilisierung relativer Häufigkeiten
Arbeitsblatt 5	Mit Zufallszahlen experimentieren – Schwankungsbreite
Arbeitsblatt 6	Simulationen mit Zufallszahlen – Vertiefungen

1 Eine Einführung in die Arbeit mit einer Tabellenkalkulation

Kennst du das „Zauberkunststück“ für das kleine Einmaleins mit der 9?

- (1) Für die Zehnerziffer schreibst du die Ziffern 0 bis 9 von oben nach unten auf.
- (2) Daneben schreibst du für die Einerziffer die Ziffern 0 bis 9 von unten nach oben auf.
- (3) Und voila: Schon hast du die Neunerreihe!

Du kannst nun ähnliche Zahlenspielerien erforschen und dabei kennenlernen, wie eine Tabellenkalkulation genutzt wird.

Wir zeigen hier, wie das mit der Tabellenkalkulation des Grafikrechners TI-Nspire geht.

Öffne die Tabellenkalkulation, die beim TI-Nspire **Lists&Spreadsheet** heißt.

Es wird eine Tabelle angezeigt, deren **Spalten** mit den Buchstaben A, B, C usw. und deren **Zeilen** mit den Zahlen 1, 2, 3 usw. bezeichnet sind. Dort, wo sich eine Zeile und eine Spalte kreuzen, steht eine **Zelle**, die mit der Spalten- und Zeilenbezeichnung gekennzeichnet wird. Die in der Abbildung farbige unterste Zelle hat z.B. die Bezeichnung **A1**. Wir wollen nun die Neunerreihe mithilfe der Tabellenkalkulation berechnen.

Zelle	to do	Kommentar
A1	1 eintragen	Startwert festlegen
B1	9 eintragen	Startwert festlegen
C1	= A1 · B1	Produkt der Zahlen aus A1 und B1 bilden
A2	= A1 + 1	Zahl aus A1 wird um 1 vergrößert
B2	= B1	In B2 soll die gleiche Zahl wie in B1 stehen
C2	= A2 · B2	Produkt der Zahlen aus A2 und B2 bilden

	A	B	C
=			
1	1	9	9
2	2	9	18
3	3	9	27
4	4	9	36
5	5	9	45
6	6	9	54
7	7	9	63
8	8	9	72
9	9	9	81
10	10	9	90

Wichtig: Befehle, die sich auf andere Zellen beziehen, müssen mit einem Gleichheitszeichen beginnen!

	0	9
	1	8
	2	7
	3	6
	4	5
	5	4
	6	3
	7	2
	8	1
	9	0

A	B	C

Und nun kommt ein Trick, der das Rechnen mit Tabellenkalkulationen so angenehm und effizient macht: Statt die Befehle weiter von Hand einzutippen, kann man sie automatisch kopieren und einfügen. Markiere dazu die Zellen A2, B2 und C2 mit **<shift>**, wähle „Menü – Daten – Füllen“ und füge die Formeln durch Betätigen der Cursortaste bis in die Zeile 10 als **Relativadressen** ein. Schließe das Ganze mit **<enter>** ab. Dabei wird der Zellbezug von Zeile zu Zeile an die Zeilennummer angepasst. So steht z. B.

in Zelle A3: = A2+1

in Zelle B3: = B2 und

in Zelle C3: = A3 · B3.

Forschungsauftrag:

Erforsche nun, ob das Einmaleins mit den Zahlen 91, 991, 9991, ... auch interessante Strukturen aufweist. Du musst dazu lediglich die Zahl 9 in der Zelle B1 durch eine der Zahlen 91, 991, 9991, ... ersetzen (Ersetzung mit **<enter>** abschließen).

Beschreibe deine Beobachtungen mit Worten.

	A	B	C
=			
1	1	9	91
2	2	91	182
3	3	91	273
4	4	91	364
5	5	91	455

Anwendungen der Tabellenkalkulation bei Zahlenspielerien

Auf dem Arbeitsblatt 1 wurde die relative Adressierung eingeführt:

Die Ergebniszelle steht in der Regel entweder direkt links oder rechts neben den zu berechnenden Zellen oder genau darüber oder darunter. In den zu berechnenden Zellen werden die Zellbezüge beim Kopieren angepasst. Jeder Befehl muss mit einem Gleichheitszeichen beginnen.

- 2.1 Berechne für jede der Zeilen 1 bis 9 in der Spalte C die Produkte der Zahlen aus den beiden Spalten A und B mithilfe der Tabellenkalkulation.

Untersuche, was passiert, wenn du in der Spalte B die Faktoren 9111, 91111, ... verwendest.

Beschreibe die Struktur der Ergebnisse mit Worten.

	A	B
=		
1	1	911
2	2	911
3	3	911
4	4	911
5	5	911

- 2.2 Die Zahlen in der Spalte A werden von Zeile zu Zeile um 33 größer.

Realisiere das mit einer relativen Adressierung bis zur Zeile 9.

In der Spalte B steht jedes Mal die Zahl 3367. Auch das kann durch eine relative Adressierung erfolgen.

Berechne dann zeilenweise für die Zeilen 1 bis 9 die Produkte der Zahlen aus den Spalten A und B. Verwende ebenfalls eine relative Adressierung.

	A	B
=		
1	33	3367
2	66	3367
3	99	3367
4	132	3367
5	165	3367
6	198	3367
7	231	3367
8	264	3367
9	297	3367

- 2.3 Untersuche, durch welche immer wiederkehrenden Rechenoperationen die Ergebnisse in der Spalte D zustande kommen. Beschreibe auch, wie man die Ergebnisse effektiv mit der Tabellenkalkulation erzeugen kann.

	A	B	C	D	E
=					
1	1	1	8	9	
2	2	12	8	98	
3	3	23	8	127	
4	4	34	8	276	
5	5	45	8	365	
6	6	56	8	454	
7	7	67	8	543	
8	8	78	8	632	
9	9	89	8	721	
10	10	100	8	810	

- 2.4 Realisiere folgende Zahlen-spielerei mit der Tabellenkalkulation.

Beschreibe dein Vorgehen.

$$1 \cdot 9 + 2 =$$

$$12 \cdot 9 + 3 =$$

$$123 \cdot 9 + 4 =$$

...

$$123456789 \cdot 9 + 10 =$$

Tipp zur relativen Adressierung in Spalte B:

Die Zahl in der Zelle B2 ergibt sich aus der Summe des Zehnfachen der Zahl in B1 und der Zahl aus A2.

	A	B	C	D	E
=					
1	1			9	2
2	2		12	9	3
3	3		123	9	4

3 Tabellenkalkulation und Zahlenspielerien – Vertiefungen

- 3.1 Untersuche, welche Zahlenspielerien durch folgende Zellenoperationen entsteht. Beschreibe die Struktur der Ergebnisse in Spalte D.

Probiere aus, ob auch für andere Ziffern in Spalte C interessante Zahlenspielerien entstehen.

Zelle A1: 1

Zelle B1: 1

Zelle A2: = A1 + 1

Zelle B2: = B1 · 10 + A2

Zelle C1: 8

Zelle D1: = B1 · C1 + A1

Zelle C2: = C1

Zelle D2: = B2 · C2 + A2

Die Zellen A2, B2, C2, D2 markieren und durch „Menü – Daten – Füllen nach unten bis in die Zeile 10 kopieren.

- 3.2 Ergänze die fehlenden Zeilen und ermittle die Ergebnisse mit der Tabellenkalkulation. Beschreibe dein Vorgehen.

0 · 9 + 8

9 · 9 + 7

98 · 9 + 6

987 · 9 + 5

...

98765432 · 9 + 0

987654321 · 9 + ?

- 3.3 Ermittle die Ergebnisse mit der Tabellenkalkulation. Beschreibe, wie du das realisiert hast.

1 · 1

11 · 11

111 · 111

1111 · 1111

11111 · 11111

111111 · 111111

1111111 · 1111111

11111111 · 11111111

111111111 · 111111111

- 3.4 Realisiere die folgenden Anweisungen mithilfe der Tabellenkalkulation.
Beschreibe dein Vorgehen sowie Besonderheiten der Ergebnisse.

Zelle A1: 1 Zelle C1: 12345679
 Zelle B1: 3 Zelle D1: = A1 · B1 · C1
 Zelle A2: =A1+1 Zelle B2: = B1
 Zelle C2: = C1 Zelle D2: = A2 · B2 · C2

Die Zellen A2, B2, C2 und D2 markieren und die Befehle durch „Menü – Daten – Füllen“ in die Zeilen 3 bis 9 übertragen.

Verändere die Zahl in der Spalte B von 3 auf 9 und beobachte die Veränderungen in der Tabellenkalkulation.

4 Stabilisierung relativer Häufigkeiten

Die theoretische Wahrscheinlichkeit für das Werfen von „Wappen“ mit einer idealen Münze ist 0,5. Wird die relative Häufigkeit für die Anzahl „Wappen“ bei n Würfen bestimmt, ergibt sich i. A. nur ein Schätzwert der theoretischen Wahrscheinlichkeit. Die Tabelle deutet an, wie eine Simulation von 1 bis 100 Würfen einer Münze mit einer Tabellenkalkulation bei gleichzeitiger Berechnung der relativen Häufigkeiten für die Anzahl „Wappen“ mit zunehmender Anzahl der Würfe realisiert werden kann.

nr	B	C	D	h
1	1	0	0	0.
2	0	0	0	0.
3	1	1	0.333333	
4	0	1	0.25	
5	1	2	0.4	

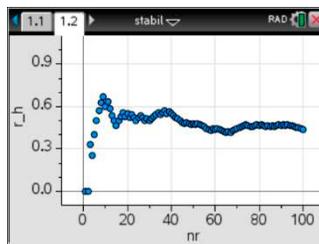
	A	B	C	D
1	1	= randint(0,1)	=B1	=C1/(A1*1.)
2	=A1+1	= randint(0,1)	=C1+B2	=C2/(A2*1.)
...
100	=A99+1	= randint(0,1)	=C99+B100	=C100/(A100*1.)

4.1 Ergänze die fehlenden Erläuterungen für die Berechnungen in der Tabellenkalkulation.

Spalte	Kommentar; Erläuterung
A	
B	Der Befehl <code>randint(0,1)</code> gibt eine Zufallszahl 0 oder 1 zurück. Die Zufallszahlen werden auf lange Sicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt. Die Zufallszahl 1 kann als „Wappen“, die Zufallszahl 0 als „Zahl“ interpretiert werden. Der Befehl wird in B1 eingegeben und durch relative Adressierung bis in die Zeile 100 kopiert.
C	
D	

4.2 Realisiere auf deinem Grafikrechner TI-Nspire diese Tabellenkalkulation. Beschrifte in der obersten Zeile die Spalte A mit der Variablen **nr** und die Spalte D mit **r_h**.

4.3 Füge eine Seite „Lists&Spreadsheet“ ein. Ordne der horizontalen Achse die Variable **nr** und der vertikalen Achse die Variable **r_h** zu, um die Entwicklung der relativen Häufigkeit grafisch zu veranschaulichen.



- 4.4 Gehe zurück auf die Seite mit der Tabellenkalkulation und veranlasse mit $\langle \text{ctrl} \rangle \langle \text{R} \rangle$ mehrfach eine Neuberechnung der Simulation. Betrachte dazu jedes Mal die grafische Darstellung. Formuliere deine Beobachtungen, indem du den Lückentext ergänzt.

Bei zunehmender _____ stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten _____ um einen _____ Wert.

5 Mit Zufallszahlen experimentieren – Schwankungsbreite

Wird eine Münze genügend oft geworfen, erwartet man, dass „auf lang Sicht“ die Ergebnisse „Wappen“ und „Zahl“ etwa gleich häufig vorkommen. Eine wirkliche Gleichverteilung ist aber wohl eher die Ausnahme, die relativen Häufigkeiten z. B. für „Wappen“ werden um den Wert 0,5 schwanken.

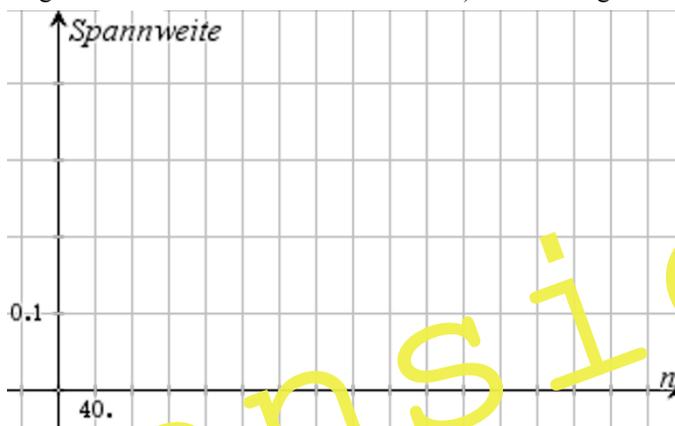
Forschungsauftrag:

Untersuche, ob es einen Zusammenhang gibt zwischen der Anzahl der Würfe und der Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit für das Ergebnis „Wappen“.

- 5.1 Ermittle für fünf Serien beim Wurf von zehn realen Münzen die Anzahl von „Wappen“. Berechne daraus die relativen Häufigkeiten. Berechne die Schwankungsbreite (Differenz zwischen der größten und kleinsten relativen Häufigkeit). Orientiere dich an dem Beispiel in der ersten Zeile der Tabelle.

Anzahl n der Münzen	Relative Häufigkeit h für „Wappen“					Differenz $h_{\max} - h_{\min}$
	Serie 1	Serie 2	Serie 3	Serie 4	Serie 5	
Beispiel	0,4	0,4	0,6	0,3	0,6	$0,6 - 0,3 = 0,3$
10						
40						
160						
640						

- 5.2 Für größere Anzahlen von Münzen kann man diesen Vorgang mit Zufallszahlen simulieren. Dazu kann die Tabellenkalkulation des Grafikrechners TI-Nspire genutzt werden. Beachte die Hinweise am Ende des Arbeitsblattes.
- 5.3 Veranschauliche die Werte aus der Tabelle (Abhängigkeit der Schwankungsbreite von der Anzahl n der Versuche) in dem Diagramm.



- 5.4 Vergleiche dein Ergebnis mit denen von Mitschülern und kreuze an, welche Aussage du für zutreffend hältst.
- (1) Mit steigendem Versuchsumfang n nimmt die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit für „Wappen“ ab.
 - (2) Bei Vervielfachung des Versuchsumfangs sinkt die Schwankungsbreite auf ein Viertel des vorherigen Wertes.
 - (3) Bei Vervielfachung des Versuchsumfangs sinkt die Schwankungsbreite auf die Hälfte des vorherigen Wertes.

Hinweise zum Gebrauch des TI-Nspire zur Ermittlung und Veranschaulichung von Zufallszahlen

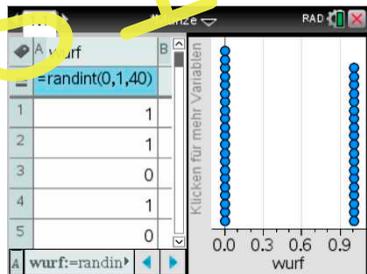
Ein wichtiger Befehl dafür ist **randint(a,b,n)**. Er erzeugt eine Liste von n ganzzahligen Zufallszahlen aus dem Bereich [a;b]. Das n-fache Werfen einer Münze kann man simulieren mit **randint(0,1,n)**.

Dabei steht das Ergebnis 1 für „Wappen“, 0 für „Zahl“ und n für die Anzahl der Zufallszahlen.

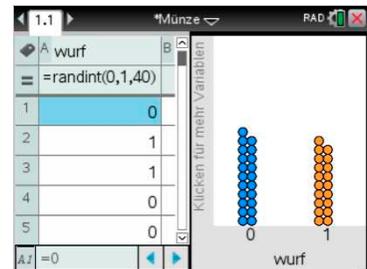
- (1) Öffne die Tabellenkalkulation und trage in das Feld über der Zelle A1 den Befehl **randint(1,6,40)** ein.
- (2) Gib der Spalte A im obersten Feld den Namen „wurf“.



- (3) Wähle „Menü – Daten – Schnellgraph“, um ein Diagramm zu erhalten. Die Ergebnisse werden automatisch sortiert. Jede Punkte säule steht für die Anzahl der Ergebnisse 0 oder 1. (Der Bildschirm wird automatisch geteilt.)

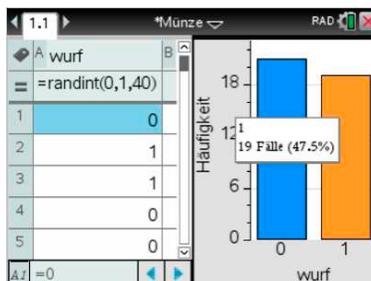


- (4) Noch schöner wird das Diagramm dargestellt, wenn du den Cursor im Diagramm auf die horizontale Achse setzt und mit **<ctrl><menü>** den Befehl „Kategorisches X erzwingen“ wählst.



- (5) Setze den Cursor auf die Diagrammfläche und wähle zunächst mit **<ctrl><menü>** den Befehl „Balkendiagramm“.

Bewege den Cursor zur Säule, die das Ergebnis „1“ repräsentiert, und dir wird die absolute und relative Häufigkeit (in Prozent) angezeigt.



- (6) Gehe mit **<ctrl><tab>** zurück in die Tabelle und veranlasse mit **<ctrl><R>** Neuberechnungen der Simulation. Notiere die relative Häufigkeit für „Wappen“ in der Tabelle auf dem Arbeitsblatt.
- (7) Falls nötig, gehe mit **<ctrl><tab>** wieder auf die rechte Bildschirmhälfte und lies die relative Häufigkeit für „Wappen“ ab.

6 Simulationen mit Zufallszahlen – Vertiefung

Forschungsauftrag:

Untersuche durch Simulationen mit Zufallszahlen, ob es wahrscheinlicher ist, bei drei Würfeln mit einer Münze zweimal „Wappen“ oder bei vier Würfeln dreimal „Wappen“ zu werfen.

- 6.1 Äußere erst eine Vermutung.
-
-

- 6.2 Erläutere und realisiere die angegebene Simulation (Spalten A, B und C wie Spalte D).

	D	E	F	G
1	=randint(0,1)	=sum(A1:C1)	=sum(A1:D1)	=countif(E1:E200,2)/200.
2	=randint(0,1)	=sum(A2:C2)	=sum(A2:D2)	=countif(F1:F200,3)/200.
3	=randint(0,1)	=sum(A3:C3)	=sum(A3:D3)	
...				

Hinweise:

sum(Liste)	Erzeugt die Summe der Elemente einer Liste z. B. durch Angabe des Zellenbereichs (wie A2:A10).
countif(Liste,Kriterien)	Gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente in der Liste zurück, die die festgelegten Kriterien erfüllen.

Spalte	Kommentar; Erläuterung
A bis D	
E	
F	
G	

6.3 Vergleiche deine Vermutung mit deinen Simulationsergebnissen und auch denen von Mitschülern.

6.4 Versuche, die Wahrscheinlichkeiten theoretisch zu begründen.

transsich

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: Vermutungen äußern, mathematisch argumentieren und kommunizieren
- Problemlösen: strukturiertes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: Tabellenkalkulation, TI-Nspire
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Rechnen mit natürlichen Zahlen, relative Adressierung in Tabellenkalkulationen, Erzeugen von Zufallszahlen, Eigenschaften relativer Häufigkeiten

Autor: Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau**Literatur:** Manfred Scholtyssek „Hexeneinmaleins“, Der Kinderbuchverlag Berlin, 1979, S. 58 ff.

Zusätzliche Mediendateien finden Sie auf www.archiv.raabe.de/mathe-stochastik im digitalen Ordner zu diesem Beitrag.

Lösungen

1

A	B	C
1	1	91
2	2	91 182
3	3	27
4	4	91 364
5	5	91 455
6	6	91 546
7	7	91 637
8	8	91 728
9	9	91 819
10	10	91 910

A	B	C
1	1	991 991
2	2	991 1982
3	3	991 2973
4	4	991 3964
5	5	991 4955
6	6	991 5946
7	7	991 6937
8	8	991 7928
9	9	991 8919
10	10	991 9910

A	B	C
1	1	9991 9991
2	2	9991 19982
3	3	9991 29973
4	4	9991 39964
5	5	9991 49955
6	6	9991 59946
7	7	9991 69937
8	8	9991 79928
9	9	9991 89919
10	10	9991 99910

A	B	C
1	1	99991 99991
2	2	99991 199982
3	3	99991 299973
4	4	99991 399964
5	5	99991 499955
6	6	99991 599946
7	7	99991 699937
8	8	99991 799928
9	9	99991 899919
10	10	99991 999910

A	B	C
1	1	999991 999991
2	2	999991 1999982
3	3	999991 2999973
4	4	999991 3999964
5	5	999991 4999955
6	6	999991 5999946
7	7	999991 6999937
8	8	999991 7999928
9	9	999991 8999919
10	10	999991 9999910

A	B	C
1	1	9999991 9999991
2	2	9999991 19999982
3	3	9999991 29999973
4	4	9999991 39999964
5	5	9999991 49999955
6	6	9999991 59999946
7	7	9999991 69999937
8	8	9999991 79999928
9	9	9999991 89999919
10	10	9999991 99999910