UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgaben-Mix I

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und angefragt. Sollten dennoch an einzelnen Materialien weitere Rechte bestehen, bitten wir um Benachrichtigung.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden
Bildnachweis Titel: JFsPic/iStock/Getty Images
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Bedingte Wahrscheinlichkeit Aufgaben-Mix I

1 Losbuden

Beim Schützenfest versucht sich Frieder an drei unterschiedlichen Losbuden. Er weiß, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einer Losbude 20 %, bei den beiden anderen bei jeweils 15 % liegen. Er wählt rein zufällig eine Losbude aus.

1.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Frieder mit dem ersten Los?

1.2 Das erste Los war eine Niete. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das zweite Los ein Gewinnlos?

1.3 Die beiden an einer Losbude gekauften Lose waren Gewinnlose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frieder die Losbude mit 20 % Gewinnwahrscheinlichkeit ausgesucht?

2 Dünnhäutigkeit

Die neue Volkskrankheit „Dünnhäutigkeit“ (Ereignis D) ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % in einer Bevölkerung vertreten.

2.1 Eine neue Testmethode für diese Krankheit ist leider noch mit Fehlern behaftet. 5 % aller untersuchten Personen, die an D erkrankt sind, werden nicht als solche erkannt sowie 3 % derer, die nicht an D leiden, werden als D-krank eingestuft. Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagrammes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Test

2.1.1 eine Einstufung als D-krank erfolgt,

2.1.2 eine Person, die D-krank ist, als solche erkannt wird,

2.1.3 eine Person, die als D-krank eingestuft ist, nicht D-krank ist?

2.2 Der Test auf die Krankheit D ist kompliziert und teuer. Ein Gesundheitsamt kann pro Tag nur zehn Tests ausführen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bzw. ist unter den zehn Testpersonen

2.2.1 keine D-krank,

2.2.2 nur die zweite, dritte und vierte Testperson D-krank,

2.2.3 die fünfte Testperson die erste, die D-krank ist,

2.2.4 höchstens die zehnte Testperson D-krank,

2.2.5 die zweite, dritte und vierte Testperson D-krank?

5 Ostfriesland

In einer ostfriesischen Schule besitzen 40 % der Schüler blonde Haare, 25 % haben blaue Augen und 15 % sind blond und blauäugig. Ein Schüler wird rein zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er

5.1 blonde Haare, wenn er blaue Augen besitzt,

5.2 keine blonden Haare, wenn er blaue Augen besitzt,

5.3 weder blaue Augen noch blonde Haare?

6 Eis als Nachtisch

In einer Ausflugsgaststätte bestellen erfahrungsgemäß 30 % der Gäste das Tagesgericht. Aus Erfahrung weiß man, dass 10 % der Gäste, die das Tagegericht bestellen, und 70 % der übrigen Gäste ein Eis als Nachtisch nehmen.

6.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Gast kein Eis isst.

6.2 Ein zufällig ausgewählter Gast isst kein Eis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er auch nicht das Tagesgericht gegessen?

© billyfoto/iStock/Getty

7 Volle Kraft?

Eine Maschine besteht aus zwei Teilgeräten T_1 und T_2 sowie einem Schnittstück S, das beide Teilgeräte verknüpft. Aus Erfahrung weiß man, dass die beiden Teilgeräte jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, das Schnittstück mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % funktionsfähig sind. Die Maschine arbeitet mit voller Kraft (Ereignis V), wenn beide Teilgeräte und das Schnittstück funktionsfähig sind, mit halber Kraft (Ereignis H), wenn eines der Teilgeräte und das Schnittstück funktionieren.

7.1 Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse V und H, sowie die Wahrscheinlichkeiten $P(V \cap H)$) und $P(V \cup H)$. Geben Sie aus den Ergebnissen eine Vierfeldertafel und ein Baumdiagramm für die Ereignisse V und H an.

9.1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bankfiliale pünktlich geöffnet wird.

9.1.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Krug rechtzeitig, Frau Meister aber verspätet kommt?

9.1.3 Herr Krug ist rechtzeitig vor der Bankfiliale eingetroffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bankfiliale pünktlich geöffnet wird?

9.1.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl Herr Krug als auch Frau Meister zu spät kommen?

9.2 Karina muss noch zehn Weihnachtskarten schreiben, darunter drei an Studienfreunde. Da sie nur vier passende Briefmarken zur Hand hat, wählt sie auf gut Glück vier der zehn Adressen aus. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass

9.2.1 keine,

9.2.2 mehr als eine Karte an Studienfreunde gehen.

10 Versicherungen


© Getty Images Plus

10.1 Von den Angestellten einer großen Versicherungsgesellschaft fahren 60 % der weiblichen und 80 % der männlichen Angestellten mit dem Pkw zur Arbeit. 40 % der Angestellten sind männlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

10.1.1 eine weibliche Angestellte mit dem Pkw zur Arbeit fährt,

10.1.2 ein Angestellter, der mit dem Pkw zur Arbeit fährt, weiblich ist?

10.2 Ein Versicherungsvertreter hat in der letzten Woche mit 10 gleichaltrigen Personen eine Lebensversicherung mit einer Laufzeit von 25 Jahren abgeschlossen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde die nächsten 25 Jahre überlebt, beträgt nach den Sterbetafeln 80 %.

Kompetenzprofil

- Niveau: vertiefend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen, argumentieren
- Problemlösen: Lösungen erarbeiten
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Baumdiagramme, Ereigniswahrscheinlichkeiten, Pfadregel, Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit, Regel von Bayes, Näherung der Binomialverteilung durch Moivre-Laplace

Autor: Alfred Müller

Lösung

1 Losbuden

1.1 Mit den Ereignissen L_i: „Losbude i“ für i = 1, 2, 3 und G: „Gewinn“ bzw. N: „Niete“ erhält man das folgende Baumdiagramm:

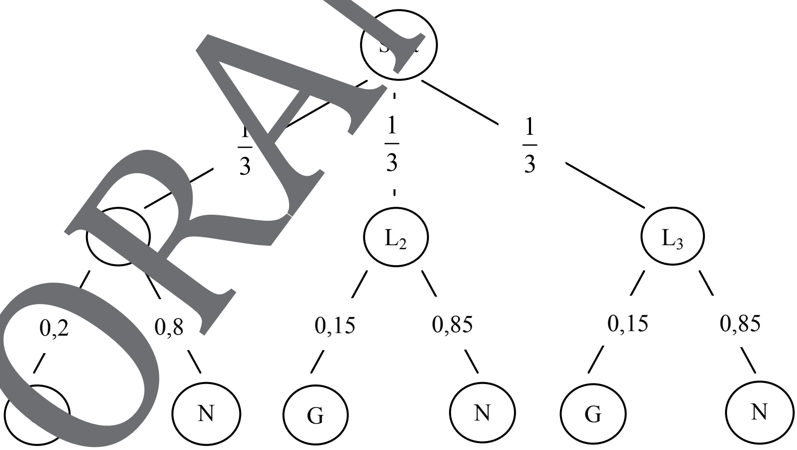

Abb. 1

Daraus erhält man mit den Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit P(G), dass Frieder mit dem 1. Los gewinnt:

$$P(G) = \frac{1}{3} \cdot (0,2 + 0,15 + 0,15) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 16,67\ \%$$

1.2 Aus dem Baumdiagramm von Teilaufgabe 1.1 erhält man mithilfe der Pfadregeln:

$$P(N_1) = \frac{1}{3} \cdot (0,8 + 0,85 + 0,85) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 1 - P(G)$$

$$P(G_2 \cap N_1) = \frac{1}{3} \cdot (0,8 \cdot 0,2 + 0,85 \cdot 0,15 + 0,85 \cdot 0,15) = 0,1383$$

Damit erhält man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit zu

$$P_{N1}(G_2) = \frac{P(G_2 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{0,1383}{0,8333} = 0,1660 = 16,60\%$$

1.3 Aus den Überlegungen zu 1.1 ergeben sich mit dem dortigen Baumdiagramm die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(G_1 \cap G_2) = \tfrac{1}{3} \cdot (0,2 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,15) = \frac{0,085}{3}$$

$$P(L_1 \cap G_1 \cap G_2) = \frac{1}{3} \cdot 0,2 \cdot 0,2 = \frac{0,04}{3}$$

Daraus folgt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit zu:

$$P_{G1 \cap G2}(L_1) = \frac{P(L_1 \cap G_1 \cap G_2)}{P(G_1 \cap G_2)} = \frac{0,04}{0,085} = 47,06\%$$

2 Dünnhäutigkeit

2.1 Mit den Ereignissen D: „D-krank“ bzw. $\overline{D}$: „Nicht D-krank“ und T: „Person wird als D-krank getestet“ bzw. $\overline{T}$: „Person wird als nicht D-krank getestet“ ergibt sich das folgende Baumdiagramm:

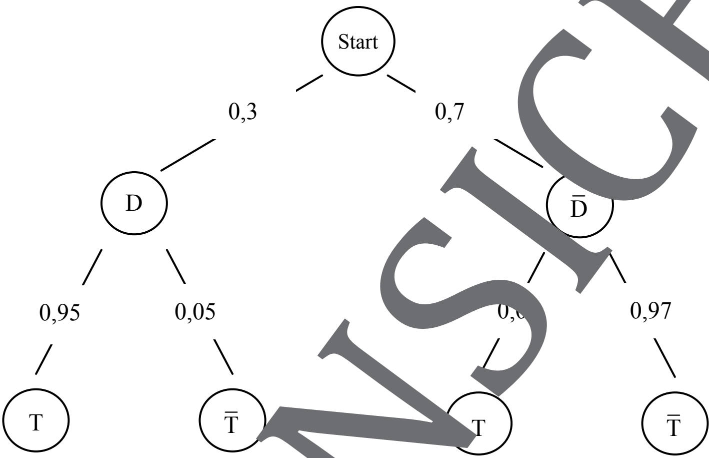

Abb. 2

Mithilfe der Pfadregeln erhält man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

2.1.1 $P(T) = 0,3 \cdot 0,95 + 0,7 \cdot 0,03 = 0,306 = 30,6\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,6 % wird eine Person als D-krank eingestuft.

2.1.2 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_D(T) = \frac{P(D \cap T)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,3} = 0,95 = 95\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % wird eine D-kranke Person als D-krank eingestuft. Diese bedingte Wahrscheinlichkeit ist direkt im Baumdiagramm abzulesen.

2.1.3 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_T(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,7 \cdot 0,03}{0,306} \approx 0,0686 = 6,86\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,86 % wird eine nicht D-kranke Person als solche eingestuft.

2.2 Mit der Wahrscheinlichkeit p = P(D) = 0,3 ergibt sich für die folgenden Ereignisse:

2.2.1 Es ergibt sich ein Pfad mit zehnmal $\overline{D}$, d. h.

$P(E_1) = (1-p)^{10} = 0,7^{10} \approx 0,0282 = 2,82\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,82 % ist keine der zehn Personen D-krank.

2.2.2 Es ergibt sich ein Pfad mit einmal $\overline{D}$, dreimal D und sechsmal $\overline{D}$, d. h.

$P(E_2) = (1-p) \cdot p^3 \cdot (1-p)^6 = p^3 \cdot (1-p)^7$

$= 0,3^3 \cdot 0,7^7 \approx 0,0022 = 0,22\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,22 % sind nur die zweite, dritte und vierte Person D-krank.

2.2.3 Es ergibt sich ein Pfad mit viermal $\overline{D}$ und einmal D. Über das, was nach der fünften Person kommt, ist nichts ausgesagt, d. h.

$P(E_3) = (1-p)^4 \cdot p = 0,7^4 \cdot 0,3 \approx 0,072 = 7,2\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,2 % ist die fünfte Testperson die erste, die an D erkrankt ist.

2.2.4 Für das Ereignis, dass die ersten neun Testpersonen nicht D-krank sind, ist die Wahrscheinlichkeit

$P(E_4) = (1-p)^9 = 0,7^9 \approx 0,0404 = 4,04\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,04 % ist frühestens die zehnte Testperson D-krank.

2.2.5 Es ist sicher, dass diese drei Testpersonen D-krank sind, über die anderen wird nichts ausgesagt, d. h.

$P(E_5) = p^3 = 0,3^3 = 0,027 = 2,7\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,7 % sind die zweite, dritte und vierte Testperson D-krank.

3 Biosiegel und Umweltverpackung

3.1 Mit den in der Aufgabenstellung genannten Ereignissen B und U erhält man
$P(B \cap U) = 0{,}88 \cdot 0{,}90 \approx 0{,}792 = 79{,}2\,\%$

79,2 % seiner Waren sind Bioprodukte und umweltfreundlich verpackt.

3.2 Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmt man mithilfe der Pfadregeln aus dem folgenden Baumdiagramm:

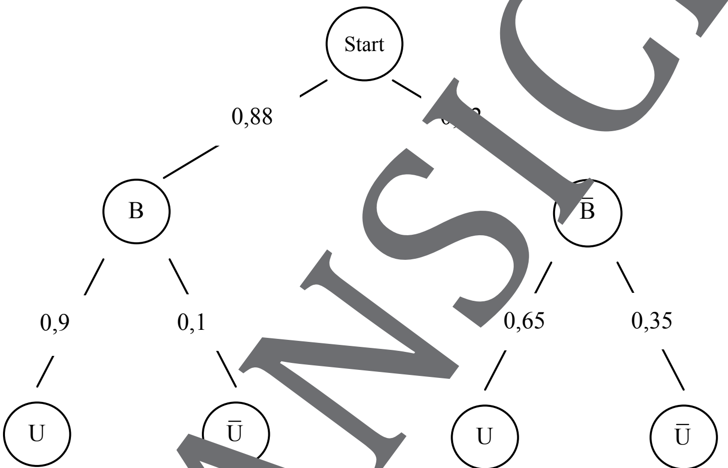

Abb. 3.1

$$P_{\overline{U}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}10}{0{,}88 \cdot 0{,}10 + 0{,}12 \cdot 0{,}35} \approx 0{,}6769 = 67{,}69\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,69 % trägt ein Artikel das Bio-Siegel, wenn es nicht umweltfreundlich verpackt ist.

Mit $p = P(B)$ ergibt sich das folgende Baumdiagramm:

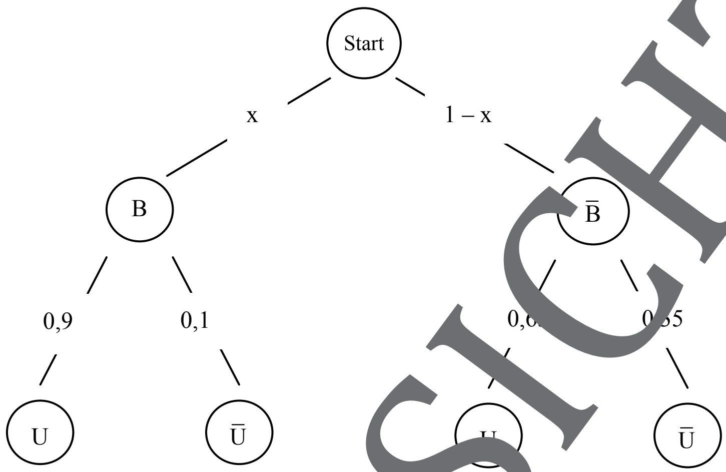

Abb. 3.2

Mit P(U) = 0,8875 ergibt sich die folgende Gleichung:

$$0,9 \cdot x + 0,65 \cdot (1 - x) = 0,8875$$
$$0,25 \cdot x = 0,2375 \quad |: 0,25$$
$$x = 0,95$$

Der Anteil der Bioprodukte beträgt jetzt 95 %.

4 Zweite Wahl

4.1 Mit den Ereignissen F: „Fehlerhaft (2. Wahl)“ und A: „Als 2. Wahl ausgesondert“ erhält man das folgende Baumdiagramm:

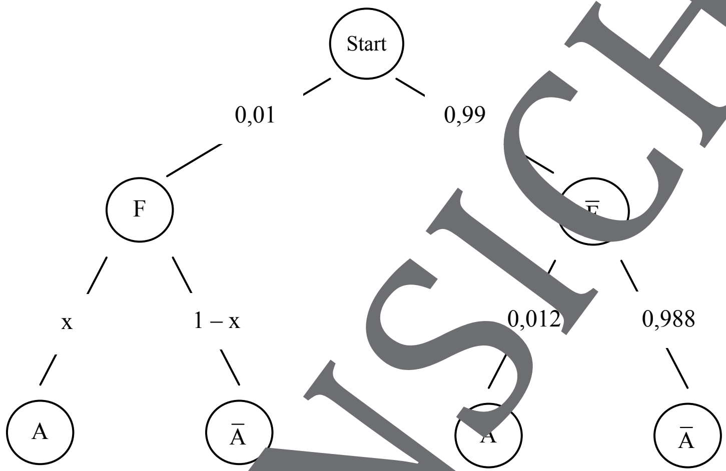

Abb. 4

Aus der Kenntnis von P(A) = 0,02 erhält man mit den Pfadregeln die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $x = P_F(A)$ durch

$$
\begin{aligned}
0,01 \cdot x + 0,99 \cdot 0,012 &= 0,02 \\
0,01 \cdot x &= 0,00812 \\
x &= 0,812
\end{aligned}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 81,2 % wird ein Nagel 2. Wahl als solcher erkannt.

4.2 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_{\overline{A}}(F) = \frac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,01 \cdot 0,188}{1 - 0,02} \approx 0,0019 = 0,19\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,19 % ist ein Nagel 2. Wahl, wenn er nicht ausgesondert wurde.