UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Meinungsforschung und Reisefreuden

Aufgaben zur Binomial-Verteilung

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Schirin Orth
Bildnachweis Titel: Donyanedomam/iStock/Getty Images Plus
Lektorat: Doreen Hempel

Meinungsforschung und Reisefreuden

1 Ein Meinungsforschungsinstitut wählt für eine statistische Erhebung 5000 repräsentative Haushalte aus und befragt sie nach der Ausstattung mit Smartphones (Tablets) und Computer. Dabei geben 4000 Haushalte an, ein Smartphone zu besitzen, während 3000 Haushalte ohne Computer waren. 1200 Haushalte hatten beide Gerätearten.

1.1 Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Ereignisse
A: „Der Haushalt besitzt mindestens einen der Gerätetypen“ und
B: „Der Haushalt besitzt genau einen der Gerätetypen“.

1.2 Die relative Häufigkeit der Ausstattung mit Computern sei auch deren Wahrscheinlichkeit.

1.2.1 Wie viele Haushalte müssen mindestens ausgewählt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einen mit Computer zu finden?

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
C: „Von acht zufällig ausgewählten Haushalten besitzen nur die beiden letzten einen Computer“ und
D: „Von acht zufällig ausgewählten Haushalten besitzen die beiden letzten einen Computer“.

2 Nach dieser anstrengenden Arbeit der Befragung plant unser Meinungsforschungsinstitut einen Betriebsurlaub. Zur Vorbereitung holt man 20 Kataloge aus dem Reisebüro R ohne zu wissen, dass zwei davon durch fehlende Seiten fehlerhaft sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim zufälligen Auswählen der Kataloge, dass

2.1 der erste ausgewählte Katalog fehlerhaft ist,

2.2 der zweite ausgewählte Katalog fehlerhaft ist, wenn der erste fehlerfrei war,

2.3 der zweite Katalog fehlerhaft ist, wenn bereits der erste fehlerhaft war,

2.4 der zweite ausgewählte Katalog fehlerhaft ist? Was fällt bei diesem Ergebnis auf?

3 Das Reiseunternehmen R hat in einem Ferienort in verschiedenen Hotels und Gasthöfen 200 Betten unter Vertrag.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen errechnen
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ereigniswahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeit, Binomialverteilung, Testen von Hypothesen, Näherung der Binomialverteilung nach Moivre-Laplace

Autor: Alfred Müller

Lösung

1.1 Es ergibt sich die folgende Vierfeldertafel mit den Ereignissen S :"Smartphone im Haushalt" und C: „Computer im Haushalt".

	S	$\overline{S}$	
C	1200	800	2000
$\overline{C}$	2800	200	3000
	4000	1000	5000

Das ergibt folgende relative Häufigkeiten:

$$h_n(A) = 1 - h_n(\overline{A}) = 1 - \frac{200}{5000} = 0{,}96 = 96\ \%$$

Die relative Häufigkeit, dass mindestens eines der Geräte in einem Haushalt zu finden ist, beträgt 96 %.

$$h_n(B) = \frac{2800 + 800}{5000} = \frac{3600}{5000} = 0{,}72 = 72\ \%$$

Die relative Häufigkeit, dass genau eines der Geräte in einem Haushalt zu finden ist, beträgt 72 %.

1.2.1 Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Haushalte mit Computer an.

Z ist binomialverteilt mit $p = \frac{2000}{5000} = 0,4$. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &> 0,95 \\ 1 - P(Z = 0) &> 0,95 \\ P(Z = 0) &< 0,05 \\ 0,6^n &< 0,05 \\ n \cdot \ln 0,6 &< \ln 0,05 \qquad |: \ln 0,6 \quad (\ln 0,6 < 0) \\ n &> \frac{\ln 0,05}{\ln 0,6} = 5,86 \\ &\Rightarrow n \geq 6 \end{aligned}$$

Man muss mindestens sechs Haushalte auswählen.

1.2.2 $P(C) = 0,6^6 \cdot 0,4^2 = 0,0075 = 0,75\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 % besitzen nur die letzten beiden Haushalte einen Computer.

$P(D) = 0,4^2 = 0,16 = 16\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 16 % besitzen die letzten beiden Haushalte einen Computer.

2.1 Mit E: „Erster Katalog in Ordnung“ und F: „Zweiter Katalog fehlerhaft“ gilt:

$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{18}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = 10\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist der erste Katalog fehlerhaft.

2.2 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19}}{\frac{18}{20}} = \frac{2}{19} = 0,10526 = 10,53\ \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,53 % ist der zweite Katalog fehlerhaft, wenn der erste fehlerfrei war.

2.3 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_{\bar{E}}(F) = \frac{P(\bar{E} \cap F)}{P(\bar{E})} = \frac{\frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19}}{\frac{2}{20}} = \frac{1}{19} = 0{,}05263 = 5{,}26\ \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,26 % ist der zweite Katalog fehlerhaft, wenn der erste auch fehlerhaft war.

2.4

$$P(F) = \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{36}{380} + \frac{2}{380} = \frac{38}{380} = 0{,}1 = 10\ \%$$

Werden alle Kataloge der Reihe nach untersucht, so entsteht als Ergebnis ein 20-Tupel mit den Komponenten „fehlerfrei“ bzw. „fehlerhaft“. Jedes dieser 20-Tupel tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für „fehlerhaft“ an der zweiten Stelle genau so groß wie an der ersten Stelle.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten kann man direkt an einem Baumdiagramm ablesen: