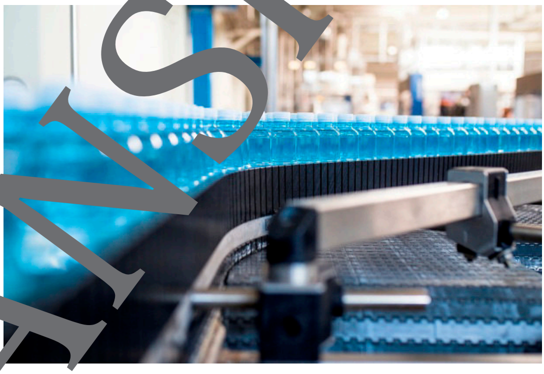
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



Massenware

Hypergeometrische Verteilung anwenden

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Group4 Studio/Getty Images/ E+/Serbia
Lektorat: Mona Hitzenauer

Massenware

Mithilfe von vollautomatisch arbeitenden Maschinen wird ein Massenartikel gefertigt.

1 Von einer Maschine ist bekannt, dass sie störungsanfällig ist. Sie fällt innerhalb einer Stunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % aus. Deshalb wird sie nach jeder Stunde kontrolliert.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
A: „Die Maschine fällt in der dritten Stunde aus“
B: „Die Maschine fällt mindestens drei Stunden nicht aus“,
C: „Die Maschine fällt erstmals in der dritten Stunde aus“,
D: $A \cup B$.

2 Bei der Herstellung des Massenartikels entsteht erfahrungsgemäß 10 % Ausschuss.

2.1 Entscheiden Sie durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeit, ob es wahrscheinlicher ist, unter 10 Stücken des obigen Artikels genau ein Ausschussstück oder unter 20 höchstens eines zu erhalten.

2.2 Es werden 50 Teile der Produktion rein zufällig überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man mehr als zwei, aber höchstens sechs defekte Stücke?

2.3 Wie viele Stücke der laufenden Produktion muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens ein Ausschussstück zu erhalten?

2.4 Wie viele Stücke der laufenden Produktion darf man höchstens überprüfen, damit es günstig ist, darauf zu wetten, dass sich darunter kein Ausschussstück befindet?

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: begründen
- Problemlösen: Lösungen angeben
- Modellierung: -
- Medien: –
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit, Hausaufgabe
- Inhalt in Stichworten: Kombinatorik und Ereigniswahrscheinlichkeiten, Binomialverteilungen, hypergeometrische Verteilung, Signifikanztest

Autor: Alfred Müller

Lösung

1. $P(A) = 0{,}2 = 20\,\%$, weil die Maschine in jeder Stunde mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 20 % ausfällt.

   $P(B) = (1-0{,}2)^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512 = 51{,}2\,\%$,

   weil die Maschine sicher drei Stunden nicht ausfällt.

   $P(C) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128 = 12{,}8\,\%$,

   weil dem ersten Ausfall zwei Stunden ohne Ausfall vorausgehen.

   $$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\underbrace{A \cap B}_{\varnothing})$$

   $$= 0{,}2 + 0{,}512 - 0 = 0{,}712 = 71{,}2\,\%$$

2.1 Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Ausschussstücke an. Z ist binomialverteilt mit $p = 0{,}1$.
Es werden folgende beiden Wahrscheinlichkeiten verglichen, die mit der Tabelle bestimmt werden.

$$P_1 = B_{0,1}^{10}(Z = 1) \approx 0{,}38742 \approx 38{,}74\,\%$$

$$P_2 = B_{0,1}^{20}(Z \le 1) \approx 0{,}39175 \approx 39{,}18\,\%$$

Es gilt $P_2 > P_1$, d. h., das Ereignis, unter 20 Stück höchstens ein Ausschussstück zu erhalten, hat eine größere Wahrscheinlichkeit als das, unter zehn genau eines zu erhalten.

2.2 Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird mithilfe der Tabelle bestimmt.

$$B_{0,1}^{50}(2 < Z \leq 6) = B_{0,1}^{50}(Z \leq 6) - B_{0,1}^{50}(Z \leq 2)$$

$$\approx 0,77023 - 0,11173$$

$$= 0,65850 = 65,85\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 65,85 % findet man unter 50 Teilen mehr als zwei, aber höchstens sechs defekte.

2.3 Es gilt stets: P (mindestens ein …) = 1 – P (kein …)

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0)$$

$$1 - 0,9^n > 0,95$$

$$0,9^n < 0,05 \qquad |\ln(...)$$

$$n \cdot \ln 0,9 < \ln 0,05 \qquad |: \ln 0,9 < 0(!)$$

$$n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} \approx 28,43 \Rightarrow n \geq 29$$

Man muss mindestens 29 Stücke überprüfen.

2.4 Man wettet auf ein Ereignis, wenn dessen Wahrscheinlichkeit größer als 50 % ist. Es soll gelten:

$$0,9^n > 0,5 \qquad |\ln(...)$$

$$n \cdot \ln 0,9 > \ln 0,5 \qquad |: \ln 0,9 < 0(!)$$

$$n < \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9} \approx 6,58 \Rightarrow n \leq 6$$

Man darf höchstens sechs Stück überprüfen.

3.1 Die Nullhypothese $H_0: p_0 \leq 0,1$ wird abgelehnt, wenn die Maschine „zu viele" Ausschussstücke produziert, d. h., im Bereich $\overline{A} = \{16, ..., 100\}$.

Wenn die Zufallsgröße Z die Anzahl der produzierten Ausschussstücke angibt, dann ist Z binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,1. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird mithilfe der Tabelle bestimmt.

$$\alpha = B_{0,1}^{100}(Z \geq 16) = 1 - B_{0,1}^{100}(Z \leq 15) \approx 1 - 0,96011$$

$$= 0,03989 \approx 3,99\% \approx 4\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 4 % gibt der Kontrolleur fälschlicherweise den Auftrag, die Maschine neu einzustellen.