

# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



**Simulationen im Stochastikunterricht**

Stochastische Prozesse mit Tabellenkalkulation modellieren

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek. I

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60a UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@klett.de  
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth  
Satz: Röser/Klett & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe  
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe  
Bildnachweis Titel: Vertigo3d/Getty Images Plus/E+  
Lektorat: Mona Hitznauer

## Simulationen im Stochastikunterricht

In den Bildungsstandards für den Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife heißt es u. a. „Die Schülerinnen und Schüler können ... Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden ...“ (S.21).

Eine Simulation ist eine Nachbildung eines realen Objekts oder Vorganges als Modell und die Nutzung dieses Modells anstelle des Originals. In diesem Beitrag werden Beispiele und Aufgaben mit Lösungen für solche Simulationen mithilfe einer Tabellenkalkulation vorgestellt. Als Software wird Excel verwendet. Alle verwendeten Excel-Befehle sind auf Seite 29 aufgelistet und erklärt.

### Einführungsbeispiel

Bei einem idealen Spielwürfel wird man erwarten, dass bei einem Sechstel der Würfe eine Sechs geworfen wird. Nun ist es sehr langsam, z. B. 360-mal einen Würfel mit der Hand zu werfen und die Anzahl der Sechsen dabei zu zählen. Deshalb nutzen wir als Simulation die Tabellenkalkulation Excel.

Die Spalten der Tabelle sind mit Buchstaben A, B usw. und die Zeilen mit Nummern 1, 2 usw. gekennzeichnet. Jede Zelle kann so mit ihrer Spalten- und Zeilennummer eindeutig charakterisiert werden.

	A	B	C
1	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A1=6;1;0)	
2			
3			

Hier „Anfassen“ und Ziehen (Rechte Maustaste)

Abb. 1

Problemstellung: Wie oft man 360 Würfeln jedes Mal genau 60 Sechsen erhalten? Diese Frage werden wir nun mithilfe einer Simulation untersuchen.

Der Befehl **=ZUFALLSBEREICH(x;y)** erzeugt eine zufällige ganze Zahl aus dem Intervall  $[x; y]$  und schreibt diesen Wert in dieselbe Zelle. Dadurch enthält die Zelle zwei Informationen: den Befehl und den aktuell erzeugten Zahlenwert. Welche Information gerade angezeigt wird kann über *Formeln-Formeln anzeigen* ausgewählt werden.

In der Zelle A1 wird also, als würde man einen Spielwürfel werfen, eine ganze Zahl aus dem Intervall [1; 6] zufällig erzeugt.

Der Befehl **=WENN(Bedingung; wahr; falsch)** schreibt als „Wahr“ (zweite Information) in die Zelle, was unter „wahr“ bzw. „falsch“ steht, je nachdem ob die Bedingung erfüllt oder nicht erfüllt ist.

In der Zelle B1 wird also automatisch eine 1 eingetragen, wenn in der Zelle A1 eine 6 erzeugt wurde, sonst wird eine 0 eingetragen.

Trägt man in eine Zelle der Tabellenkalkulation eine Formel (Funktion, Befehl) ein, so muss zuerst ein **Gleichheitszeichen** gesetzt werden. Ansonsten wird die Formel als Wert (Schrittzahl, Datum, etc.) interpretiert.



© Thinkstock

Markiert man nun die Zellen A1 und B1 und zieht das Mauszeiger-Quadrat an der rechten unteren Ecke zum Beispiel bis in die Zeile 360, dann werden die Befehle aus A1 und B1 in diesen Bereich übertragen.

	A	B	C
1	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A1=6;1;0)	
2	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A2=6;1;0)	
3	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A3=6;1;0)	
4	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A4=6;1;0)	
5	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A5=6;1;0)	

Abb. 2

Dabei passiert folgendes: Beim Kopieren werden diese Zellbezüge relativ zur Zielposition angepasst. Beim Kopieren in der Zeile (waagrecht) wird der Spaltenbuchstabe und beim Kopieren in der Spalte (senkrecht) wird die Zeilennummer angepasst. Wenn man z.B. die Formel **=WENN(A1=6;1;0)** um eine Zeile nach unten kopiert, wird daraus automatisch **=WENN(A2=6;1;0)**. Man spricht von einem **relativen Zellbezug**.

Sind nun die Befehle aus A1 und B1 bis in die Zeile 360 kopiert, so kann man in Zelle C1 den Befehl **=SUMME(B1:B360)** anwenden. Da in der Spalte B überall dort eine 1 steht, wo in der links daneben stehenden Zelle der Spalte A eine 6 erzeugt wurde (und sonst eine 0 steht), ergibt die Summe aus den Zahlen im Bereich von B1 und B360 die Anzahl der „Treffer“, also die Anzahl der Sechsen.

	A	B	C
1	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A1=6;1;0)	=SUMME(B1:B360)
2	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A2=6;1;0)	
3	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A3=6;1;0)	
4	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A4=6;1;0)	
5	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A5=6;1;0)	
6	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A6=6;1;0)	
7	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	=WENN(A7=6;1;0)	

Abb. 3: Formeln sind angezeigt

	A	B	C	D
1	3	0	67	
2	4	0		
3	6	1		

Abb. 4: Werte sind angezeigt

In diesem Bildschirmabdruck kann man sehen, dass bei dieser Simulation 67-mal eine Sechs „gewürfelt“ wurde.

Mit der Taste <F9> sind beliebig viele Neuanordnungen möglich. Man kann so beispielsweise für zehn Realisierungen die Anzahl der Sechsen bei jeweils 360 Würfeln feststellen und einen Mittelwert bilden. Das kann z. B. so aussehen:

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	67	60	53	55	56	54	58	61	70	55	<b>58,8</b>

Die Werte wurden in der Tabellenkalkulation in die Zellen D1, E1, ..., M1 eingetragen und der Mittelwert 58,8 mit dem Befehl

=MITTELWERT(Bereich) bestimmt. Der Mittelwert wird hier in der Zelle N1 mit dem Befehl =MITTELWERT(D1:M1) ermittelt.

Mit der Simulation haben wir die Erfahrung gesammelt, dass bei einer Stichprobe in der Regel nur ein Schätzwert (eine Punktschätzung) der zu erwartenden Häufigkeit vorkommt. Bildet man den Mittelwert möglichst vieler solcher Schätzungen, so liegt dieser meistens ziemlich gut in der Nähe des theoretisch zu erwartenden Wertes.

1. **Nicht nur Sechsen zählen - Häufigkeitsverteilung beim Würfeln**  
Simulieren Sie 360-mal das Werfen eines Würfels. Zählen Sie die Anzahl der Einsen, Zweien, ..., Sechsen mit dem ZÄHLENWENN-Befehl und stellen Sie die Verteilung der absoluten Häufigkeiten grafisch dar.

*Hinweise:*

	A	B	C
1	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Einsen:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;1)
2	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Zweien:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;2)

Abb. 5

- Der Befehl =ZÄHLENWENN(Zählbereich; Kriterien) gibt die kumulierte (summierte) Anzahl aller Elemente in der Liste (Zählbereich) zurück, die die festgelegten Kriterien erfüllen.
- Über *Einfügen-Empfohlene Diagramme* werden in der Tabelle markierte Ergebnisse als Diagramm angezeigt. Das Programm unterbreitet Vorschläge für die Wahl des Diagramms.

2. **„Wappen“ doppelt und dreifach**  
Was ist wahrscheinlicher: Bei drei Würfeln mit einer Münze zweimal „Wappen“ oder bei vier Würfeln dreimal „Wappen“ zu werfen?  
Äußern Sie erst eine Vermutung.  
Erläutern und realisieren Sie eine Simulation.  
Vergleichen Sie Ihre Vermutung dann mit den Simulationsergebnissen.  
Versuchen Sie, die Wahrscheinlichkeiten theoretisch zu begründen.

	A	B	C	D	E	F	G
1	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=SUMME(A1:D1)	=SUMME(A1:D1)	=ZÄHLENWENN(E1:F200;2)/200	
2	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=SUMME(A2:D2)	=SUMME(A2:D2)	=ZÄHLENWENN(F1:F200;3)/200	
3	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=ZUFALLSBEREICH(0;1)	=SUMME(A3:D3)	=SUMME(A3:D3)		

Abb. 6: Monte Carlo Simulation

Spalten A, B und C wie Spalte D.

### Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend und erhöht
- Fachlicher Bezug: Stochastik
- Kommunikation: Vermutungen äußern, beschreiben und begründen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln, unbekannte Wahrscheinlichkeiten schätzen, Auswirkungen von Modellparametern erkunden
- Medien: PC oder Laptop mit Excel oder Google-Tabellen, Smartphone/Tablet mit Tabellenkalkulations-App (z.B. von Microsoft Excel).
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Simulationen mit Tabellenkalkulation von stochastischen Prozessen

**Autor:** Dr. Wilfried Zappe

### Literatur

Meyer/ Leydecker; „Simulieren im Stochastikunterricht der Sek I“; Schroedel, 2013

### Lösungen

1.

	A	B	C
1	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Einsen:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;1)
2	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Zweien:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;2)
3	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Dreien:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;3)
4	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Vieren:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;4)
5	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Fünfen:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;5)
6	=ZUFALLSBEREICH(1;6)	Anzahl Sechsen:	=ZÄHLENWENN(A1:A360;6)
7	=ZUFALLSBEREICH(1;6)		
8	=ZUFALLSBEREICH(1;6)		
9	=ZUFALLSBEREICH(1;6)		

Abb. 1

*Hinweis:* In Spalte A werden 360 Zufallszahlen aus dem Intervall [1; 6] wie beim Würfeln erzeugt. In Spalte B werden (ohne vorangestelltes Gleichheitszeichen) die möglichen Ergebnisse als Text eingetragen.

In Spalte C wird gezählt, wie oft unter den 360 erzeugten Zufallszahlen das jeweilige Ergebnis vorkommt.

Der Befehl `=ZÄHLENWENN(Zählbereich; Kriterien)` gibt die summierte (summierte) Anzahl aller Elemente in der Liste zurück, die die festgelegten Kriterien erfüllen. Der Zählbereich kann z. B. durch die erste Zeile und letzte Zeile des Bereiches angegeben werden, hier z. B. in der Zelle C1 durch `=ZÄHLENWENN(A1:A360;1)`, wenn die Zufallszahlen in den ersten 360 Zeilen der Spalte A stehen und wenn die Anzahl der Einsen in diesem Bereich ermittelt werden soll. Auf gleiche Weise werden die Befehle für das Zählen der anderen Würfelergebnisse angegeben.

Dann wird der Bereich von B1 bis C6 markiert. Über *Einfügen-Empfohlene Diagramme* werden die Ergebnisse z. B. als Säulendiagramm angezeigt.

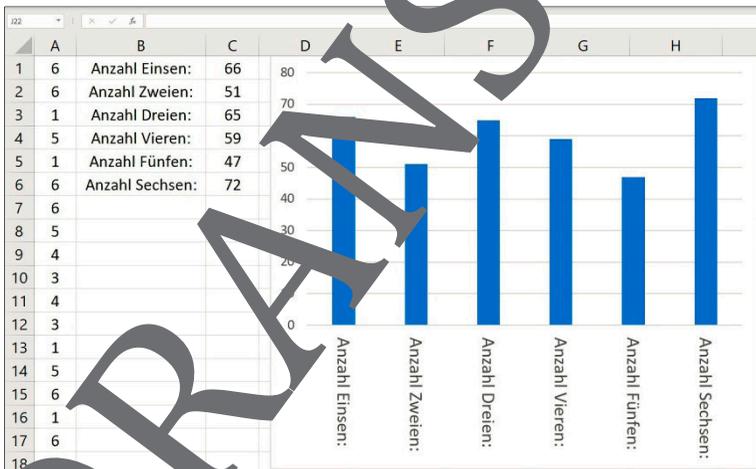


Abb. 14

Mit F9 kann die Simulation beliebig oft wiederholt und beobachtet werden.

Erkenntnis: Die absoluten Häufigkeiten ändern sich, aber man gewinnt fast immer den Eindruck, dass die „Würfelzahlen“ annähernd gleichverteilt sind.

Verwendete Excel-Befehle:

Befehl Excel	Bedeutung
ZUFALLSBEREICH(a;b)	Gibt eine ganzzahlige Zufallszahl aus [a; b] zurück.
ZUFALLSZAHL()	Gibt eine gleichmäßig verteilte reelle Zufallszahl größer oder gleich 0 und kleiner als 1 zurück.
WENN(Bedingung; wahr; falsch)	Gibt zurück, was unter „wahr“ bzw. „falsch“ steht, je nachdem ob die Bedingung erfüllt oder nicht erfüllt ist.
WENN(UND(Bed1;Bed2);wahr;falsch)	Gibt zurück, was unter „wahr“ bzw. „falsch“ steht, je nachdem ob die Bedingungen Bed1 und Bed2 gleichzeitig erfüllt oder mindestens eine nicht erfüllt ist.
SUMME(Liste)	Erzeugt die Summe der Elemente einer Liste, z. B. durch Angabe des Zellbereichs (wie A2:A10).
ZÄHLENWENN(Liste;Kriterien)	Gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente in der Liste zurück, die die festgelegten Kriterien erfüllen.
BINOM.INV(p;n;ZUFALLSZAHL())	Gibt einen Zufallswert einer mit n und p binomialverteilten Zufallsgröße zurück.
GANZZAHLE(z)	Rundet eine Zahl z auf die nächstkleinere ganze Zahl ab.
WURZEL(z)	Gibt die Quadratwurzel einer Zahl z zurück.

## **Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**