Überraschende Erkenntnisse zur Wahrscheinlichkeit – Praxisorientierte Beispiele

von Christiane Imlintz und Dr. Andreas Kittel

© South_agency/Getty Images Plus/E+

Die Wahrscheinlichkeit in alltäglichen Situationen einzuschätzen fällt im Allgemeinen schwer. Dies zeigt sich besonders in den vorgestellten Beispielen dieses Beitrags. So ist die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Krankheit zu haben, oftmals wesentlich geringer als dies die Sensitivität eines Tests angibt. Dies wissen oftmals nicht einmal Ärzte und beraten dadurch die Patienten eventuell falsch. Ebenso unglaublich ist es, dass bereits ab 23 Personen die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Diese und weitere Beispiele werden in lehrreichen Arbeitsblättern vorgestellt.

RAABE, KLASSE SCHULE

Überraschende Erkenntnisse zur Wahrscheinlichkeit – Praxisorientierte Beispiele

Klassen 8–10

von Christiane Imlintz und Dr. Andreas Kittel

Kompetenzprofil

Inhalt: motivierende und realitätsbezogene Aufgaben zu Inhalten der Stochastik, Aufgaben aus den Bereichen Geburtstags- und drei Türen Problem, Würfelaufgaben, Vierfeldtafel sowie Biathlon

Medien: 3 Spielwürfel und selbstklebendes Papier in drei Farben für Aufgabe 3, WTR, Tabellenkalkulationsprogramm,

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K 2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5)

Überraschende Erkenntnisse zur Wahrscheinlichkeit – Praxisorientierte Beispiele

Methodisch-didaktische Hinweise

Begründung des Themas

Die Vermittlung fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht beinhaltet auch die Leitidee „Daten und Zufall“. Die Schülerinnen und Schüler erhalten durch das Wissen über Stochastik die Möglichkeit, auch über unsichere Ausgänge von Ereignissen Aussagen zu treffen. Mit dieser Thematik werden die Schülerinnen und Schüler oftmals auch im Alltag konfrontiert, beispielsweise mit Wahrscheinlichkeiten über das Auftreten einer Krankheit und die Zuverlässigkeit von Tests. Es ist wichtig, in diesem Bereich kompetent zu sein, um falsche oder unklare Aussagen revidieren zu können.

Methodisches Grundprinzip

Bei den hier vorliegenden Arbeitsblättern handelt es sich um realitätsbezogene Aufgaben, die das bereits Gelernte festigen und vertiefen sollen. Die Arbeitsblätter können deshalb in Unterrichtseinheiten zur Stochastik als praxisorientierte Beispiele in den Unterricht aufgenommen werden. Durch den Alltagsbezug wird die Motivation gesteigert.
Es empfiehlt sich die in den Arbeitsblättern vorgeschlagenen Materialien zur Hand zu haben, um die Probleme handlungsorientiert bearbeiten zu können. Die Arbeitsblätter sollen zunächst in Gruppenarbeit von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Die Lehrkraft steht bei Fragen zur Verfügung. Die Gruppen können leistungshomogen oder –heterogen eingeteilt werden. Bei leistungshomogenen Gruppen empfiehlt es sich, den schwächeren Gruppen zu den einzelnen Aufgaben Hilfen beispielsweise in verbaler Form zu geben. Diese Form der Zusammenarbeit steigert die Kommunikationsfähigkeit untereinander und fördert den Umgang mit der Fachsprache. Später werden die Ergebnisse im Plenum diskutiert und die Ergebnisse präsentiert (z. B. mithilfe einer Folie oder von Plakaten), um damit Präsentationskompetenz zu fördern.

Was müssen die Schüler können? – Angenommene Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler benötigen Grundlagen in der Stochastik, um die Aufgaben bearbeiten zu können. So sollten folgende Grundkenntnisse der Stochastik bereits im Unterricht behandelt worden sein: Unterschied zwischen absoluter und relativer Häufigkeit, grundlegende Kenntnisse in Kombinatorik, Pfadregel, Erstellen eines Baumdiagramms sowie für Aufgabe 5 Binomialkoeffizient und Binomialverteilung

Aufgaben

1. **Das Geburtstagsproblem – Ein Ergebnis, das alle erstaunt**

Jan hat letzte Woche mit ein paar Freunden seinen Geburtstag gefeiert. Leider konnten viele Gäste nicht kommen, da ein gemeinsamer Freund am gleichen Tag wie Jan Geburtstag hat. Aus diesem Grund möchte sich Jan nun näher mit dem Problem beschäftigen, wie wahrscheinlich es ist, dass zwei Leute am gleichen Tag Geburtstag haben. Hilf Jan bei seinen Überlegungen.


© South_agency/Getty Images Plus/E+

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 4 Personen jeder in einem anderen Monat Geburtstag hat.

b) Berechne nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 4 Personen mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag haben.

c) Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil 1.1) und 1.2) bei einer Gruppengröße von n = 6, 8, 10 Personen?

d) Ab welcher Gruppengröße liegt die Wahrscheinlichkeit über 60 % dafür, dass mindestens zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben?

Übertrage deine Überlegungen nun auf Jans ursprüngliches Problem, dass er und sein Freund am gleichen Tag Geburtstag haben.

e) Berechne wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben bei einer Gruppengröße von 5 (6, 7, 8, 9, 10) Personen.

f) Wie viele Freunde darf Jan einladen, damit zu weniger als 60 % die Wahrscheinlichkeit besteht, dass keiner von den Eingeladenen an diesem Tag ebenfalls Geburtstag hat.

Hinweis: Schaltjahre sollen bei den Berechnungen nicht berücksichtigt werden. Lege für Aufgabenteil 1.7) eine Wertetabelle in einem Tabellenkalkulationsprogramm an.

2. **Ein Spiel für das Schulfest. Wechseln oder nicht?**


© 3D_generator/Getty Images Plus/iStock

Das Schuljahresende rückt näher und damit auch das alljährliche Schulfest. Jede Klasse wird darum gebeten an diesem Tag etwas zu präsentieren oder vorzuführen. Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 9a haben sich für dieses Jahr überlegt eine Spielshow vorzubereiten, an der die Besucher des Schulfestes teilnehmen können. Ihr Lehrer hat ihnen während der Unterrichtseinheit Wahrscheinlichkeitsrechnung von einer Show erzählt, die vor Jahren mal im Fernsehen lief. Dabei konnten sich die Kandidaten für eines von drei Toren entscheiden (Hinter einem Tor ist der Hauptgewinn und hinter den anderen beiden jeweils nur ein Stofftier/Niete). Anschließend öffnet der Moderator ein Tor, hinter dem ein Stofftier (Niete) ist. Danach bietet er dem Kandidaten die Möglichkeit das von ihm gewählte Tor zu wechseln oder nicht.

Die Schülerinnen und Schüler wollen im Vorfeld herausfinden, ob sie den Kandidaten raten sollten das Tor noch einmal zu wechseln oder bei ihrer ersten Entscheidung zu bleiben.

a) Teilt eure Klasse in zwei Gruppen ein und führt eine Stichprobe durch. Die erste Gruppe wechselt jedes Mal das Tor, die zweite Gruppe bleibt bei ihrer Entscheidung. Überlegt euch zunächst, wie groß der Umfang eurer Stichprobe sein soll. Jede Gruppe berechnet die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Vergleicht anschließend eure Ergebnisse.

Tipp: Wenn ihr die beiden Gruppen nochmals in mehrere kleine Gruppen unterteilt, wird der Umfang der Stichprobe größer. Haltet eure Ergebnisse in Form einer Tabelle fest.

b) Versucht eine mathematische Begründung zu finden, was der Moderator auf dem Schulfest seinen Kandidaten raten sollte. Ist die Gewinnwahrscheinlichkeit höher, wenn man wechselt oder nicht?

Tipp: Erstellt jeweils ein Baumdiagramm. 1. Diagramm Kandidat wechselt nicht. 2. Diagramm Kandidat wechselt.

Lösungen

1.

a) $\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\approx 0{,}573$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 4 Personen jeder in einem anderen Monat Geburtstag hat, liegt bei ca. 57 %.

b) Die Lösung entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit aus 1a):
$p = 1-0{,}573\approx 0{,}427$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 4 Personen mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag haben, liegt bei ca. 43 %.

c) $n=6: p=1-\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{12}\approx 0{,}777$

$n=8: p=1-\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{12}\approx 0{,}954$

$n=10: p=1-\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}\approx 0{,}996$

d) Ab einer Gruppengröße von 5 Personen liegt die Wahrscheinlichkeit über 60 % dafür, dass mindestens zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben. Das Ergebnis erhält man durch ausprobieren.

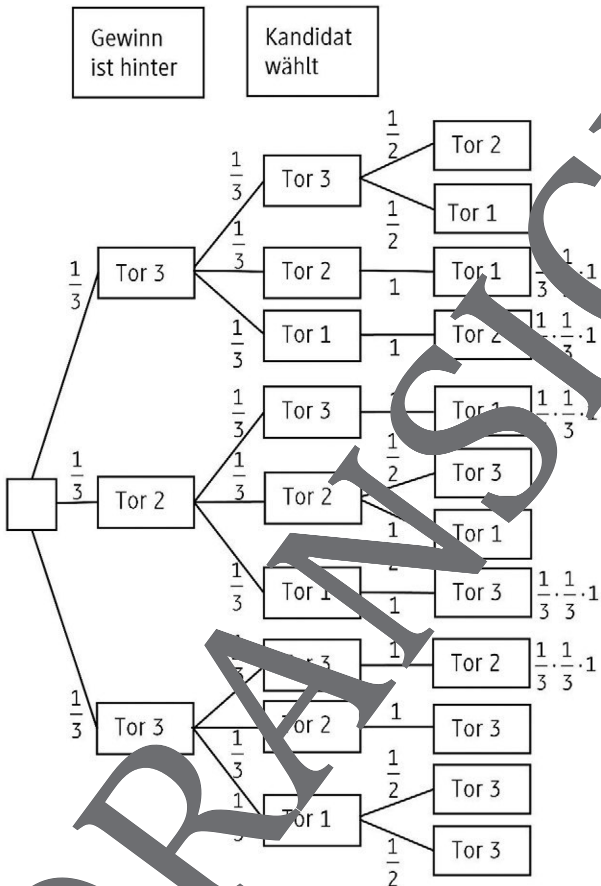
e) $P(n)=1-\frac{365!}{(365-n)!\cdot 365^n}$

$P(5)=1-\frac{365!}{(365-5)!\cdot 365^5}\approx 0{,}027$ $P(6)=1-\frac{365!}{(365-6)!\cdot 365^6}\approx 0{,}041$

$P(7)=1-\frac{365!}{(365-7)!\cdot 365^7}\approx 0{,}056$ $P(8)=1-\frac{365!}{(365-8)!\cdot 365^8}\approx 0{,}074$

$P(9)=1-\frac{365!}{(365-9)!\cdot 365^9}\approx 0{,}095$ $P(10)=1-\frac{365!}{(365-10)!\cdot 365^{10}}\approx 0{,}117$

b) Baumdiagramm, wenn der Kandidat wechselt:

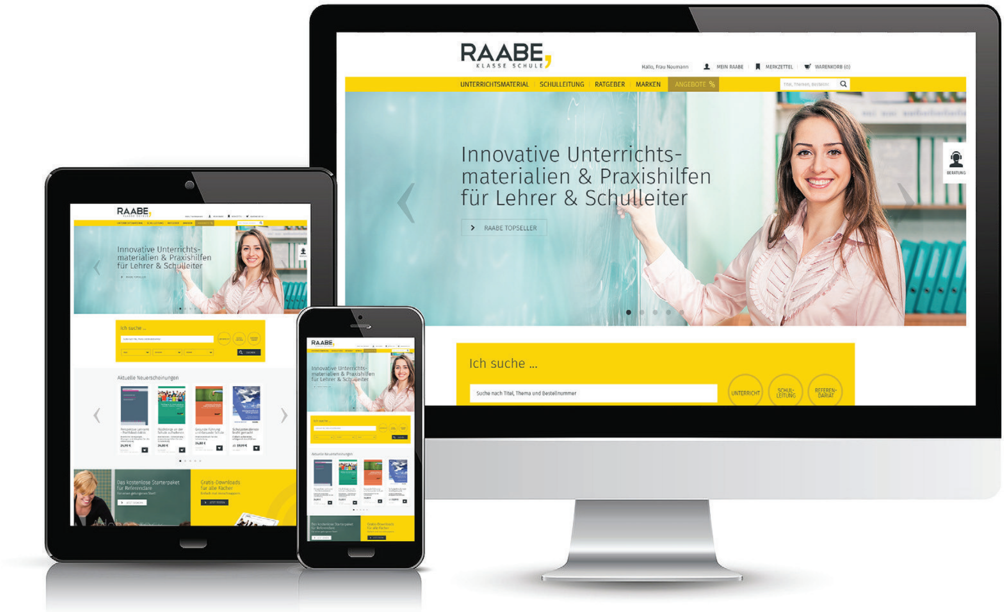


Daraus ergibt sich für den Gewinn beim Wechsel folgende Wahrscheinlichkeit:

$$p = 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \frac{2}{3}$$

RAABE,
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de