Dichte- und Verteilungsfunktion – Aufgaben zu Wahrscheinlichkeit und Analysis

von Günther Weber

© andresr/Getty Images Plus/E+

In diesem Beitrag bestimmen [illegible] Schüler Wahrscheinlichkeits-, Dichte- und Verteilungsfunktionen in alltäglichen Kontexten. Außerdem beweisen sie für gegebene Funktionen, dass es sich um Dichtefunktionen handelt und trainieren das Zeichen von Graphen.

RAABE, KLASSE SCHULE

Dichte- und Verteilungsfunktion – Aufgaben zu Wahrscheinlichkeit und Analysis

Sekundarstufe II

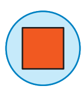
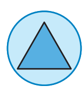
von Günther Weber

Kompetenzprofil

Inhalt: Rechteckverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, Erwartungswert, Varianz, Streuung, lineare Funktion, Stammfunktion, Produktintegration

Medien: dynamische Mathematiksoftware

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3)

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.	
 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau

Dichte- und Verteilungsfunktion – Wahrscheinlichkeit und Analysis

Methodisch-didaktische Hinweise

Bei Aufgabe 2 kann die Lehrkraft den Nachweis, dass die Fläche unter der Dichtefunktion gleich 1 ist, bzw. die Verteilungsfunktion der Dreiecksfunktion für das Intervall]c; b] vorgeben oder diese Aufgabenteile werden nur von leistungsstarken Schülern zur Differenzierung bearbeitet.

Liegen die Inhalte der Analysis weiter zurück, so sollten vor der Bearbeitung von Aufgabe 2 c) bzw. Aufgabe 7 die Produktintegration (partielle Integration) und die Berechnung uneigentlicher Integrale wiederholt werden.

Informationen zur Dichte- und Verteilungsfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen nennt man **Dichtefunktion**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- die Funktionswerte sind nicht negativ;
- die Fläche unter einer Dichtefunktion hat den Inhalt 1, d. h. bei stetigen Funktionen gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Die **Verteilungsfunktion** F(x) gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist, d. h. $F(x) = P(X \leq x)$. Bei **diskreten** Zufallsvariablen erhält man die Verteilungsfunktion durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten, bei **stetigen** Zufallsvariablen durch Integration über die Dichtefunktion f(x): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} x \cdot f(z)\, dz$

Erwartungswert und **Varianz** einer Zufallsvariablen sind Maßzahlen (Kenngrößen), mit denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen genauer beschrieben werden kann.

Der Erwartungswert $\mu = E(X)$ einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichtefunktion f(x) ist definiert als: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$, die Varianz als: $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\, dx$

und die Standardabweichung als: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Die bekannteste Verteilung ist wohl die Normalverteilung; weniger bekannt sind die Rechteckverteilung, die Dreieckverteilung oder die Exponentialverteilung.

Aufgaben

1. **Diskrete Verteilungsfunktion**
   Auf einer Laser-Stanzmaschine werden Metallplatten aus Blech gefertigt. Nach einer Reparatur der Maschine werden dem laufenden Produktionsprozess 2 Bleche entnommen: Diese Teile werden anschließend überprüft, ob sie die Anforderungen für das Produkt erfüllen. Eine Zufallsvariable X zählt die Anzahl der entnommenen Bleche, die den Anforderungen genügen.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Blech, das den Anforderungen genügt, p ist.
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion für p = 0,9.

2. Eine Zufallsvariable X hat die Funktion f. Zeigen Sie jeweils, dass die Funktionen f Dichtefunktionen sind und bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen:

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \le x \le b;\, b > a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die zu f gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Rechteckverteilung**.

b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \dfrac{2}{(b-a)\cdot(c-a)}(x-a) & \text{für } a \le x \le c \\ \dfrac{2}{(b-a)\cdot(b-c)}(b-x) & \text{für } c < x \le b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases} \quad \text{mit } a < c < b$$

Die zu f gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Dreiecksverteilung**.

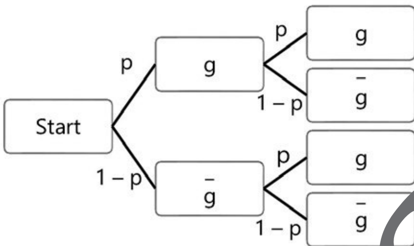
c) $$f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-kx} & \text{für } x \ge 0,\, k > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die zu f gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Exponentialverteilung**.

Lösungen

1.

a) Gibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Teile an, die den Anforderungen genügen (g), so kann die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl von X mithilfe eines Baumdiagramms veranschaulicht werden.



Aus dem Baumdiagramm ergibt sich dann folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{für } X = 0 \\ 2p\cdot(1-p) & \text{für } X = 1 \\ p^2 & X = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da es sich um eine diskrete Zufallsvariable handelt, erhält man die Verteilungsfunktion F(X) durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten.

$F(0) = P(X = 0) = (1-p)^2$

$F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1-p)^2 + 2p\cdot(1-p) = 1-p^2$

$F(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1-p^2+p^2 = 1$

Die Verteilungsfunktion lautet somit:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < 0 \\ (1-p)^2 & \text{für } 0 \le X < 1 \\ 1-p^2 & \text{für } 1 \le X < 2 \\ 1 & \text{für } X \ge 2 \end{cases}$$