Hypergeometrische Verteilung – Poisson-Verteilung

Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Illustrationen von Udo Mühlenfeld

Foto: Udo Mühlenfeld

Der Beitrag ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, weitgehend selbstständig die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten zweier eher „exotischer" Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erarbeiten. Mit vielfältigen Differenzierungsmöglichkeiten können Sie eine individuelle Förderung innerhalb der Lerngruppen erzielen. Bei der Auswahl der Beispiele wurde auf ein Gleichgewicht zwischen Kontextbezug und innermathematischen Aspekten Wert gelegt, wobei die gewählten Alltagssituationen nicht aufgesetzt sind, sondern solide recherchiertes Datenmaterial enthalten und weitgehend dem Lebensumfeld der Jugendlichen entnommen sind.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Ann[illegible] Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Illustrationen: Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Lektorat: M[illegible] Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: [illegible]anna Stotz, Wyhl a. K.

Hypergeometrische Verteilung – Poisson-Verteilung

Oberstufe (erhöht)

Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Illustrationen von Udo Mühlenfeld

Die Schüler lernen:

die hypergeometrische Verteilung und die Poisson-Verteilung an realitätsnahen Aufgaben kennen.
Der GTR nimmt in diesem Beitrag einen angemessenen Raum ein, zum einen ist er ein wichtiges Hilfsmittel für die Auswertung realer Daten und der grafischen Darstellungen im Zusammenhang mit Poisson-Verteilungen, zum anderen bietet er Experimentiermöglichkeiten, um beispielsweise Spielabläufe zu simulieren. Online-Recherche und interaktive Internet-Rechner tragen außerhalb der Aufgaben mit zur Motivation Ihrer Lerngruppe bei.

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **DA** = Datenauswertung

Thema	Material	Methode
Theorie	M1	Ab
LOTTO 6AUS49 – informieren und simulieren	M2	Ab, DA
LOTTO 6AUS49 – Wahrscheinlichkeiten berechnen	M3	Ab, DA
Hypergeometrische Verteilung – Anwendungen	M4	Ab
Eigenschaften der Poisson-Verteilung	M5	Ab
Poisson – Die Verteilung der seltenen Ereignisse	M6	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: hypergeometrische Verteilung, Poisson-Verteilung, Abgrenzung zur Binomialverteilung, Eigenschaften der Poisson-Verteilung, Zufallsgrößen, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Simulation von Zufallsprozessen, Rekursionsformel, hypergeometrische Verteilung und Poisson-Verteilung im Kontext

Medien: GTR, Online-Recherche

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Didaktisch-methodische Hinweise

Inhaltliche Legitimation

Sowohl die hypergeometrische Verteilung wie auch die Poisson-Verteilung sind in den aktuellen Lehrplänen der Bundesländer für die gymnasiale Oberstufe nur selten explizit erwähnt, lassen sich aber durch ihre inhaltliche Nähe zur Binomialverteilung durchaus legitimieren. Im Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe in Hessen ist z. B. ein Themenfeld mit **prozessbezogenem Schwerpunkt** ausgewiesen.

Quelle: *https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kcgo-m.pdf*
S. 45/46 (aufgerufen am 12.11.2020)

Q 4.7 Weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- hypergeometrische Verteilung: Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen (z. B. Lotto, Keno), Vergleichen mit der Binomialverteilung.
- Poisson-Verteilung: Näherung der Binomialverteilung für seltene Ereignisse, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen.

Das Material in dem Beitrag ist so vielfältig angelegt, dass es beispielsweise diesem Themenfeld gerecht wird.

Praktische Umsetzung im Unterricht

Erste Merkmale der hypergeometrischen Verteilung (siehe **M 1** Theorie) können Sie bereits im Zusammenhang mit der Einführung der Binomialkoeffizienten herausarbeiten, gerade auch um deren Bedeutung im Urnenmodell anschaulich erfahrbar zu machen. Die Auseinandersetzung mit der hypergeometrischen Verteilung vertiefen Sie dann bei der Einführung der Binomialverteilung, um die Unterschiede beim Ziehungsprozess – mit Zurücklegen, ohne Zurücklegen – aufzuzeigen. Thematisieren Sie die Poisson-Verteilung (vgl. **M 1** Theorie) im Anschluss an die Binomialverteilung bestenfalls parallel zur Normalverteilung, da beide unter bestimmten Voraussetzungen sich aus der Binomialverteilung gewinnen lassen.

Methodisch fördern Sie die Selbstständigkeit der Jugendlichen, indem Sie variantenreich mit Blick auf Ihre Lerngruppe agieren.

Die Materialien enthalten zahlreiche Differenzierungsangebote, einerseits vertiefende Zusatzaufgaben, andererseits zusätzliche motivierende Lernangebote zur individuellen Förderung lernstärkerer Schüler. Außerdem können die Lernenden teilweise auf Online-Angebote zurückgreifen, um Ergebnisse selbst zu kontrollieren.

Das Material **M 6** ist für ein Gruppenpuzzle geeignet, während bei der Auswertung der Daten bei der Simulation in Material **M 2** die ganze Lerngruppe eingebunden ist. Die Herleitung der Rekursionsformel im Material **M 5** (Aufgabe 13) können Sie alternativ auch als Kurzreferat einsetzen.

Zu den einzelnen Kompetenzen, die gefördert werden:

Der Beitrag fördert prozessbezogene Kompetenzen, die z. B. im Kernlehrplan von Nordrhein-Westfalen aufgeführt werden.[1]
Im Folgenden werden diese Kompetenzerwartungen nur aufgeführt, wenn sie in besonderer Weise durch das Material gefördert werden können.

Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler[2]
- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.

1 https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf (abgerufen am 12.11.2020)

2 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

Problemlösen

Die Schüler

- recherchieren Informationen,
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus,
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung.

Argumentieren

Die Schüler

- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen.

Kommunizieren

Die Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen, formulieren eigene Überlegungen,
- nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Werkzeuge nutzen

Die Schüler

- verwenden digitale Werkzeuge zum grafischen Darstellen von Funktionen, Generieren von Zufallszahlen und Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen,
- reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge.

In besonderer Weise ist der Beitrag geeignet, den Kompetenzbereich **Werkzeuge nutzen** zu vertiefen, gerade auch mit Blick auf den Einsatz des GTR im Abitur. Die Lösungen sind mithilfe des GTR TI-Nspire CX erstellt worden. Dazu notwendige Rechnerbefehle werden in den Materialien zur Verfügung gestellt. Vergleichbare Rechnermodelle sind natürlich an dieser Stelle ebenso geeignet.

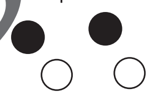
Darüber hinaus lernen die Schüler, sich kritisch mit den Gewinnwahrscheinlichkeiten bei Glücksspielen auseinanderzusetzen, und erfahren Möglichkeiten, das Eintreten seltener Ereignisse, die mit Gefahren verbunden sind – wie beispielsweise beim Meteoriteneinschlag –, zu quantifizieren. Nutzen Sie die Gelegenheit, die Bedeutung der theoretischen Chance zu diskutieren. Zum Beispiel 1 : 76 für 2 Richtige + Superzahl im Lotto garantiert eben nicht, dass bei 76 abgegebenen Tipps garantiert ein Gewinn vorhanden ist.

M 1 Theorie

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Hypergeometrische Verteilung

Parameter/Formel	Beispiel	
N: Grundgesamtheit	N = 10	Grundgesamtheit: 
M: Anzahl der Elemente mit besonderer Eigenschaft in der Grundgesamtheit	M = 4	
n: Umfang der Stichprobe	n = 4	Stichprobe: 
k: Anzahl der Elemente mit besonderer Eigenschaft in der Stichprobe	k = 2	
$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$; $n \leq N$; $k \leq M \leq N$	$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{4-2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3}{7}$	

Poisson-Verteilung

n: Anzahl der Bernoulli-Versuche
p: Erfolgswahrscheinlichkeit
λ : Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße
k: Anzahl der Erfolge
Für sehr große n und sehr kleine p und $\lambda = n \cdot p = \text{konstant}$ gilt: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $P(X \leq k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} \right)$; $k \in \mathbb{N}_0$

M 2 LOTTO 6AUS49 – Informieren und simulieren

1. **Informationen zum Spiel – Internetrecherche**
   Das staatlich kontrollierte Glücksspiel LOTTO 6AUS49 besitzt in Deutschland einen ebenso hohen Bekanntheits- wie Beliebtheitsgrad. Die Ausspielungen finden mittwochs und samstags statt.
   a) Informieren Sie sich z. B. bei *https://de.wikipedia.org/wiki/Lotto* **(1)** (abgerufen am 13.11.2020) über den Spielablauf und die Höhe der wöchentlichen Spieleinsätze.
   b) Informieren Sie sich über die Bedeutung der Superzahl.
   c) Auf der o. g. Internetseite finden Sie Informationen zu den theoretischen Chancen in den einzelnen der insgesamt 9 Gewinnklassen. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp überhaupt einen Gewinn zu erzielen.
   d) Bewerten Sie dieses Ergebnis mit Blick auf den hohen Beliebtheitsgrad.

2. **3 Richtige im Lotto – Simulation der Ziehung mit dem GTR**
   Öffnen Sie beim TI-NSpire CX ein Arbeitsblatt Lists&Spreadsheets. Erzeugen Sie mithilfe der Menü-Option 3 (Daten) und 1 (Folge erzeugen) die laufenden Nummern 1 bis 49 und speichern Sie diese in Spalte A unter **lottoz** ab. Verwenden Sie den Befehl randsamp(lottoz,6,1), um die Gewinnzahlen zu ermitteln, und speichern Sie die Reihe in Spalte B unter **gewinnz** ab. Genauso erstellen Sie in der Spalte C „Ihren Lottotipp".
   a) Vergleichen Sie Ihren Tipp in Spalte C mit den Gewinnzahlen in Spalte B und prüfen Sie, ob Sie drei Richtige haben.
   b) Erstellen Sie eine zweite Tippreihe durch einen Doppelklick auf den Befehl **randsamp(lottoz,6,1)** in Spalte C. Prüfen Sie erneut, ob Sie drei Richtige haben.
   c) Ermitteln Sie auf diese Weise die Anzahl der Tipps, bei denen Sie drei Richtige haben, bei insgesamt 20 erstellten Tipps.
   d) Tragen Sie alle Ergebnisse aus Ihrer Lerngruppe zusammen und vergleichen Sie das Ergebnis mit der theoretischen Chance von der Webseite **(1)**.

---

3. Führen Sie eine entsprechende Simulation für die Gewinnklasse 9 (2 Richtige + Superzahl), führen Sie diese durch und werten Sie sie entsprechend aus.

RAABE
KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!

Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de