Glück im Glücksspiel? – Ereigniswahrscheinlichkeiten ermitteln

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

© Leland Bobbe/DigitalVision/Getty Images Plus

Ob beim Drehen des Glücksrads, beim Kartenspiel oder Münzwurf – zum Gewinnen gehört oft eine ordentliche Portion Glück dazu. Wie viel genau, berechnen Ihre Schülerinnen und Schüler in abwechslungsreichen Aufgaben mit den Werkzeugen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik. Damit stärken Sie besonders das Wissen und Können rund um das Thema Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung.

RAABE KLASSE SCHULE

Glück im Glücksspiel? – Ereigniswahrscheinlichkeiten ermitteln

Oberstufe (grundlegend)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Die Schüler lernen:

ihre Kompetenzen in den Themengebieten Bernoulli-Kette, Binomialkoeffizient und -verteilung sowie Hypothesentest anhand von komplexeren Textaufgaben unter Beweis zu stellen. Die Aufgaben des Beitrags fokussieren sich dabei insbesondere auf die Anwendung des Binomialkoeffizienten sowie der Binomialverteilung zur Wahrscheinlichkeitsberechnung von Ereignissen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Ereignisse und Ereigniswahrscheinlichkeiten, Vierfeldertafel und Baumdiagramm mit Pfadregeln, bedingte Wahrscheinlichkeit, Binomialkoeffizient, Binomialverteilungen

Medien: GTR/CAS, Tafelwerk

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Lehrplanbezug

Die Aufgaben des Beitrags fördern die Kompetenzen im Bereich „Binomialverteilung, Daten und Zufall“ in der Mittel- und Oberstufe. Beispielsweise aus den Lehrplänen der Länder Bayern und Baden-Württemberg des Gymnasiums:

- *https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/11/mathematik*
- *http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/9-10/05*

(aufgerufen am 15.03.2021)

Die Schülerinnen und Schüler …

– führen Sachsituationen durch Analogiebildung auf die Urnenmodelle zurück, um die Anzahl möglicher Ergebnisse auch unter Zuhilfenahme von Binomialkoeffizienten zu bestimmen. In einfachen Fällen berechnen sie damit verbundene Wahrscheinlichkeiten,
– modellieren Sachzusammenhänge mit Bernoulli-Ketten und verwenden die Binomialverteilung bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
– können Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen,
– können Vierfeldertafeln erstellen und verwenden, auch zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Einsatzmöglichkeiten

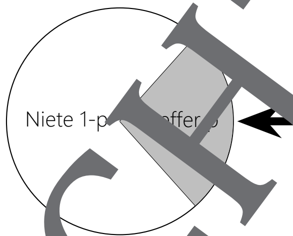
Besonders die Aufgaben 3. a), 5. a) und 6. a) bieten sich zum arbeitsteiligen Lösen mit drei Gruppen an. Die Aufgabe 1. bzw. 1 b) bietet einen Bezug zur Analysis, womit Sie einen teilgebietsübergreifenden Unterricht gestalten können.

Differenzierung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Niveau	●	■	●	■	■	●	■
Aufgabe	8	9	10				
Niveau	●	▲	▲				

M 1 Aufgaben

1. Auf einem Glücksrad ist wie in der nebenstehenden Skizze ein Sektor markiert. Zeigt der Pfeil nach der Drehung des Rades auf diesen Sektor, so spricht man von einem Treffer T, sonst von einer Niete N. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei p mit $0 < p < 1$.



Grafik: Alfred Müller

a) Das Glücksrad wird dreimal gedreht.
Die Ereignisse A und B werden durch
A: „Mindestens zwei Treffer" und B: „Genau ein Treffer" definiert.
(1) Zeichnen Sie zu diesem Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B).
(2) Überprüfen Sie die Ereignisse A und B auf Unvereinbarkeit.
(3) Beschreiben Sie das Ereignis $E = \overline{A} \cap \overline{B}$ in Worten und begründen Sie, dass die Ereignisse A, B und E eine Zerlegung des Ergebnisraumes Ω bilden.

b) Das oben beschriebene Zufallsexperiment wird zu einem Glücksspiel verwendet. Man gewinnt, wenn sich das Ereignis B einstellt. Wie muss die Trefferwahrscheinlichkeit p gewählt werden, damit die Gewinnwahrscheinlichkeit P(B) maximal wird? Bestimmen Sie dann den Wert P(B).

c) Wie oft muss das Rad bei einer Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ mindestens gedreht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens einen Treffer zu erzielen?

d) Das obige Glücksspiel mit $P(\text{Gewinn}) = \frac{4}{9}$ wird fünfmal gespielt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
(1) nur ein Gewinnspiel,
(2) mindestens ein Gewinnspiel,
(3) das erste Gewinnspiel beim fünften Spiel,
(4) nur Gewinnspiele?

e) Wie oft darf das Glücksspiel höchstens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal gewinnt, unter 90 % bleibt?

6. Beim Schulfest des „Los-Glück-Gymnasiums“ werden Tombola-Lose verkauft, deren Gewinnwahrscheinlichkeit bei 25 % liegt.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man mit 100 Losen
      (1) höchstens zehnmal,
      (2) mindestens 16-mal?
   b) Die Lose werden im „Zehnerpack“ verkauft mit der Maßgabe, dass bei keinem Gewinnlos der Kaufpreis des Zehnerpacks zurückerstattet wird. Wie groß ist das Risiko für eine Rückerstattung?
   c) In einer anderen Lostrommel befinden sich noch 100 Lose, von denen 60 Nieten sind. Frau Krümel kauft vier Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie
      (1) nur Gewinnlose,
      (2) mehr als zwei Gewinnlose,
      (3) höchstens ein Gewinnlos?

7. Ein Zufallsgenerator liefert Zufallsziffern (0–9). Es wird eine Sequenz von 20 Zufallsziffern betrachtet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   a) genau dreimal die Ziffer 6,
   b) höchstens einmal die Ziffer 0,
   c) mindestens acht und höchstens zwölf gerade Ziffern?

8. Lena und Niklas spielen bei gleicher Spielstärke sehr häufig Schach gegeneinander. Lena glaubt, dass die folgenden Ereignisse die gleichen Wahrscheinlichkeiten besitzen:
   E_1: „Lena gewinnt 1 von 2 Spielen“,
   E_2: „Lena gewinnt 5 von 10 Spielen“,
   E_3: „Lena gewinnt 10 von 20 Spielen“.
   Stimmt das?

9. Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 %. Welches der beiden Ereignisse besitzt die größere Wahrscheinlichkeit?
   E_1^*: „Der zweite Gewinn tritt spätestens beim achten Spiel ein.“
   E_2^*: „Der zweite Gewinn tritt frühestens beim vierten Spiel ein.“

10. Elias wirft einen Laplace-Würfel n-mal.
   a) Für welche Zahl n wird die Wahrscheinlichkeit am größten, dass genau eine Sechs fällt?
   b) Wie groß muss man n wählen, damit man darauf wetten kann, dass mindestens zwei Sechser fallen?