Kombinatorik und Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

© Tom Werner/DigitalVision/Getty Images Plus

„Zwei Personen in der Klasse haben am gleichen Tag Geburtstag? Glaub ich nicht, das kommt doch bestimmt fast nie vor! Und wie viele Möglichkeiten gibt es gleich nochmal, wenn ich drei Gäste auf sechs Zimmer verteile?“

Mit vielen einfallsreichen Fragen und Begebenheiten entführt dieser Beitrag Ihre Klasse in das Reich der Kombinatorik und der Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Stärken Sie mit den Aufgaben das Textverständnis und die Modellierungskompetenz Ihrer Schülerinnen und Schüler und überraschen Sie sie mit unerwarteten Ergebnissen.

RAABE, KLASSE SCHULE

Kombinatorik und Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Oberstufe (grundlegend)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Hinweise	**1**
M 1 Aufgaben	**3**
Lösungen	**8**

Die Schüler lernen:

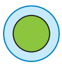
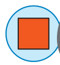
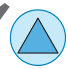
ihr Wissen und Können rund um das Thema Kombinatorik und Laplace-Wahrscheinlichkeiten an realitätsnahen Aufgaben einzusetzen. Die Aufgaben fördern besonders die Kompetenzen „mathematisch Modellieren“ und Textverständnis, da die Jugendlichen zu den Textaufgaben zunächst das bzw. die passenden Urnenmodelle finden müssen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kombinatorik und Ereigniswahrscheinlichkeiten
Medien: GTR/CAS
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Lehrplanbezug

Die Aufgaben des Beitrags erfüllen wesentliche Punkte aus den Lehrplänen im Bereich „Wahrscheinlichkeiten und Zufall“ der Mittel- und Oberstufe. Beispielsweise aus den Lehrplänen der Länder Bayern und Baden-Württemberg:

- *https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/10/mathematik*
- *http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/9-10/05*
- *http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/7-8/05*

(aufgerufen am 05.03.2021)

Die Schülerinnen und Schüler …

– strukturieren zusammengesetzte Zufallsexperimente mit Baumdiagrammen, auch unter Zurückführung auf Urnenexperimente,
– können die Begriffe Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette erläutern und Bernoulli-Experimente von anderen Zufallsexperimenten unterscheiden,
– können die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten (mögliche und günstige Ergebnisse) in konkreten Situationen durch einfache kombinatorische Überlegungen bestimmen,
– können Baumdiagramme zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente erstellen,
– können Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten mithilfe der Pfadregeln (Produkt-, Summenregel) bestimmen,
– können Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen,
– können Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen.

Lehr- und Lernvoraussetzungen

Die Aufgaben des Beitrags eignen sich sehr gut, wenn Sie die Theorie zum Thema Kombinatorik bereits eingehend mit Ihrer Klasse besprochen haben. Insbesondere die vier Urnenmodelle, die sich aus den Möglichkeiten „mit/ohne Zurücklegen“ und „mit/ohne Reihenfolge“ ergeben, müssen bekannt sein.

Die Jugendlichen sollten in der Lage sein, wichtige Informationen aus Textaufgaben entnehmen und die Sachverhalte in passende Urnenmodelle verwandeln zu können.

Bestenfalls kennen die Lernenden bereits Bernoulli-Experimente bzw. Bernoulli-Ketten. Alternativ lassen Sie die Teilaufgabe 1. a) (4) entfallen oder verwenden sie als Zusatzaufgabe für besonders leistungsstarke Klassenmitglieder.

Aufgabe 13 richtet sich an die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler und behandelt unter anderem die Themen „stochastische Unabhängigkeit“ und „binomialverteilte Zufallsvariablen“.

Einsatzmöglichkeiten

Sie können den Beitrag sehr vielfältig in Ihrem Unterricht einsetzen: klassisch in der Einzel-Stillarbeit und in der Paararbeit.

Wenn die Jugendlichen noch Probleme bei komplexeren Textaufgaben haben, empfiehlt es sich, die Aufgabenstellungen vorher zu besprechen, damit sie korrekt verstanden worden sind.

Die Aufgaben eignen sich auch als Hausaufgabe oder im Heimunterricht. Ebenso können Sie die Aufgaben 5–9 einsetzen, um Können und Wissen von einzelnen Schülerinnen und Schülern (etwa an der Tafel) abzufragen, da zur Bearbeitung keine Hilfsmittel (Tafelwerk, Taschenrechner etc.) nötig sind.

Differenzierung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Niveau	●	▲	●	■	●	■	●

Aufgabe	8	9	10	11	12	13
Niveau	●	■	●	■ d) ▲	■ f) g) ▲	▲

M 1 Aufgaben

1. Geburtstage
   a) Sieben Freunde stehen beieinander.
      Wie wahrscheinlich ist es, dass
      (1) alle an verschiedenen Wochentagen,
      (2) alle am gleichen Wochentag,
      (3) niemand im Dezember,
      (4) genau drei Personen im letzten Vierteljahr,
      (5) mindestens zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben?
   b) Eine Schulklasse umfasst 23 Schülerinnen und Schüler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?
   c) Wie viele Personen muss eine Gruppe mindestens umfassen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens eine Person im Oktober Geburtstag hat?

2. Julia kassiert als Eintrittsgeld für den Schulball von jeder Person 1 €. Innerhalb von 10 Minuten kommen 15 Personen, von denen lediglich neun eine 1 €-Münze bei sich haben, die restlichen Personen bezahlen mit einem 2 €-Stück. Zu Beginn hat Julia vier 1 €-Münzen als Wechselgeld. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten keine Probleme beim Zahlen ein?

3. Ein idealer Würfel wird reihum von den Personen A, B, C, D in dieser Reihenfolge geworfen. Gewonnen hat die Person, die zuerst eine Sechs würfelt, dann wird das Spiel beendet. Würfelt niemand eine Sechs, wird das Spiel aber trotzdem nach zwölf Würfen für beendet erklärt.
   a) Wie groß sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Personen?
   b) Mit drei Würfen eines idealen Würfels wird die Augensumme AS = 16 erreicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste geworfene Augenzahl eine 5?

4. Die Festschrift einer Schule umfasst 30 Seiten. Zehn Seiten davon sind für die Werbung reserviert, wobei auf jede dieser Werbeseiten drei Anzeigen passen. Die Zuteilung auf die 30 Anzeigenplätze erfolgt nach dem Zufallsprinzip. Ein Kaufhaus hat drei verschiedene Anzeigen in Auftrag gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle drei Anzeigen auf einer Seite erscheinen?

10. Im Erdgeschoss des Parkhauses an der Post sollen Firmenparkplätze vermietet werden. Der Stadtrat ist dafür, dass von den 20 zusammenhängenden und nebeneinanderliegenden Parkplätzen acht in Firmenparkplätze umgewandelt werden.
    a) Wie viele Verteilungsmöglichkeiten für die acht Firmenparkplätze gibt es?
    b) Wie viele Verteilungsmöglichkeiten verbleiben, wenn die acht Firmenparkplätze nebeneinanderliegen sollen?
    c) Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, wenn man aus jeweils fünf der zwanzig Parkplätze zwei Firmenparkplätze auswählt?

11. Lukas lädt zu einer Faschingsparty ein. Von seinem Vater, der mit Marmelade gefüllte Faschingskrapfen gebacken hat, lässt er sich zwei mit Senf füllen, wobei sich diese äußerlich nicht von den anderen unterscheiden.
    a) Lukas gibt acht mit Marmelade und die zwei mit Senf gefüllten Faschingskrapfen in einen Korb. Daraus entnimmt er rein zufällig fünf der zehn Krapfen und legt sie nebeneinander in eine Reihe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
       (1) ist keiner,
       (2) sind der zweite und der fünfte Krapfen mit Senf gefüllt?
    b) Lukas legt die zehn Krapfen wieder in den Korb und fordert seine Freundin Leni auf, zwei Krapfen zu entnehmen. Zeichnen Sie zu diesem Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass
       (1) beide Krapfen,
       (2) mindestens einer der Krapfen mit Senf gefüllt ist.
    c) Lukas legt die zehn Krapfen wieder in den Korb. Da sein Vater noch mehr mit Marmelade gefüllte Krapfen gebacken hat, nimmt er einen Krapfen aus dem Korb, legt ihn weg und gibt einen mit Marmelade gefüllten in den Korb. Er führt dieses Entnehmen viermal hintereinander aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nur mit Marmelade gefüllte Krapfen aus dem Korb geholt?
    d) In einer Bäckerei befinden sich in drei Körben jeweils zehn Krapfen. Am Ende des Verkaufsvormittags sind noch insgesamt drei Krapfen vorhanden, wobei die Krapfen beim Verkauf einzeln und nacheinander rein zufällig jeweils einem der Körbe entnommen wurden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in jedem der drei Körbe noch genau ein Krapfen befindet?