# Punktzahl beim Würfeln und Konstruierbarkeit von Dreiecken

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Mona Hitzenauer, Regensburg


© Stadtratte/iStock/Getty Images

Zufallsexperimente werden oft mit Würfeln durchgeführt. Hierbei benutzt man bestimmte Eigenschaften der Augenzahlen, um Ereignisse zu definieren. Im vorliegenden Beitrag sind die Würfelzahlen als Zwischenschritt benutzt, um die Konstruierbarkeit von Dreiecken festzustellen. Hierzu werden drei Würfel gleichzeitig geworfen und die Augenzahlen mit der Seitenlänge (in cm) eines zu konstruierenden Dreiecks gleichgesetzt. Abhängig von der Konstruierbarkeit und der Form des konstruierten Dreiecks werden dann unterschiedliche Aufgabenstellungen der Stochastik der Oberstufe untersucht. Unterstützt wird die Bearbeitung der Aufgaben durch eine Simulation mit einer Tabellenkalkulation. Da viele Aufgabenstellungen der Oberstufe im Bereich der Stochastik angesprochen werden, eignet sich die Aufgabe gut zur Vorbereitung auf das Abitur.

# Punktzahl beim Würfeln und Konstruierbarkeit von Dreiecken

## Oberstufe (weiterführend)

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Mona Hitzenauer, Regensburg





## Die Schüler lernen:

die Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten in komplexeren Aufgaben einzusetzen. Bevor sie die Pfadregeln anwenden, müssen sie die Wahrscheinlichkeiten am Baum anhand der Konstruierbarkeit von Dreiecken bzw. der Form der konstruierten Dreiecke bestimmen. Sind zusätzliche Informationen zur Konstruierbarkeit bzw. zur Form der Dreiecke bekannt, so berechnen die Lernenden bedingte Wahrscheinlichkeiten. Vergrößert sich die Anzahl der Laplace-Zufallsexperimente, so wenden sie die Formel von Bernoulli an.
Die Konstruierbarkeit der Dreiecke bzw. die Form der Dreiecke lässt sich auch für ein Spiel benutzen. Die Jugendlichen berechnen bei dieser Aufgabe den Erwartungswert und überprüfen, ob das Spiel fair ist.
Um Aussagen über die Anzahl der Versuche zu treffen, wenden die Schüler die σ-Regeln an. Ebenso überprüfen sie mithilfe eines Alternativtests, auf welche Art die Zufallszahlen für die Dreiecke erzeugt wurden.

# Hinweise

## Lernvoraussetzungen

Damit die Lernenden die Aufgaben lösen können, sollten sie die Dreiecksungleichung – die Summe der beiden kleineren Dreieckseiten ist größer als die dritte Seite – und die verschiedenen Formen (gleichseitig, gleichschenklig, beliebig) eines Dreiecks kennen. Aus dem Bereich der Stochastik beherrschen die Lernenden das Zeichnen von Baumdiagrammen und die Pfadregeln. Ebenso sollten sie die Formel von Bernoulli kennen und anwenden können. Die Jugendlichen kennen den Erwartungswert einer Zufallsvariable und wissen, wann ein Spiel fair ist. Sie sind ebenso vertraut mit den Konfidenzintervallen und dem Testen von Hypothesen.

## Lehrplanbezug

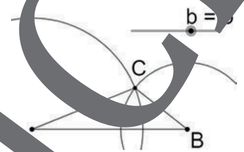
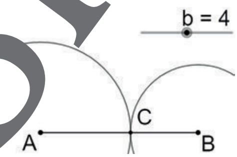
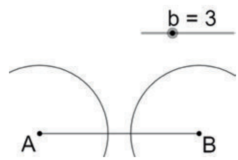
In den Kernlernplänen NRW (*GOSt KLP Mathematik (nrw.de)* aufgerufen am 09.06.2021) sind im Inhaltsfeld Stochastik unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt: Die Schülerinnen und Schüler…

- simulieren Zufallsexperimente,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- verwenden Bernoulli-Ketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch,
- nutzen die Sigma-Regeln für prognostische Aussagen,
- interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse,
- beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art.

**Hinweis:** Zum Aufgabentyp der Dreimal-Mindestens-Aufgabe vgl. z. B. *Dreimal-Mindestens-Aufgaben – lernen mit Serlo!* (aufgerufen am 09.06.2021).

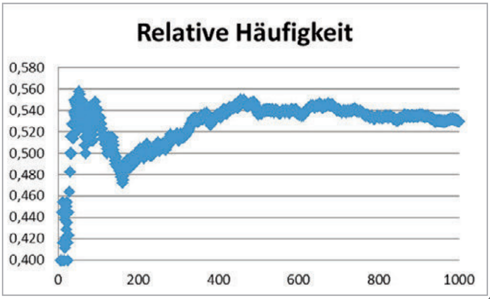
## Anwendung im Unterricht

Vor der Simulation wiederholen Sie noch einmal die (Nicht-)Konstruierbarkeit von Dreiecken aus drei Seiten. Veranschaulichen lässt sich dies gut mit einem dynamischen Geometrieprogramm. Bei der Konstruktion halten Sie eine Seite variabel.
Im folgenden Beispiel ist c = 7 cm, a = 3 cm und die Seite b kann mithilfe eines Schiebereglers verändert werden.

| | |
|---|---|
| $a + b > c$<br>Die Kreise um die Eckpunkte A und B schneiden sich in C. Das Dreieck ist konstruierbar. |  |
| $a + b = c$<br>Die Kreise um die Eckpunkte A und B berühren sich in C. Das Dreieck ist nicht konstruierbar. |  |
| $a + b < c$<br>Die Kreise um die Eckpunkte A und B schneiden sich nicht. Das Dreieck ist nicht konstruierbar. | <br>*Grafiken: Günther Weber, Brilon* |

Arbeitet man z. B. mit GeoGebra, so kann man die Veränderung der Seitenlänge der Seite b auch animieren.
Der Einsatz der Tabellenkalkulation kann als „Blackbox" erfolgen, indem Sie als Lehrkraft die Jugendlichen nur auf das Zurücksetzen der Werte durch Eingabe der Zahl 0 bzw. 1 in Zelle **B7** und auf das „Neu berechnen" durch Drücken der Taste **F9** hinweisen. Sie können aber auch auf einige Formeln, deren Funktionen weitestgehend selbsterklärend sind, eingehen (siehe Lösung von Aufgabe 1a).
Die Werte der Simulation können auch bei vielen anderen Aufgaben mit den berechneten Werten verglichen werden, sodass die Ergebnisse in etwa bestätigt werden.

Bei der Simulation gehen Sie auch auf das **Gesetz der großen Zahlen** ein, indem Sie die relativen Häufigkeiten im Diagramm darstellen und herausarbeiten, dass sich die Daten immer mehr um einen bestimmten Wert stabilisieren.




*Grafik: Günther Weber, Brilon*

Vor der Bearbeitung von Aufgabe 1b erklären Sie Ihrer Klasse den Aufbau der Tabellen (siehe unten). In der oberen Zeile und der 1. Spalte stehen die Augenzahlen des 1. und 2. Würfels. In der Mitte steht jeweils eine der Augenzahlen, die der 3. Würfel annehmen kann.

Die Auswertung erfolgt folgendermaßen:

Wählen Sie eine Augenzahl in der Mitte und gehen Sie zur Augenzahl der vorderen und oberen Begrenzung. Addieren Sie von den drei Augenzahlen die beiden kleineren. Ist die Summe größer als die 3. Augenzahl, dann kreuzen Sie das Feld an (das Dreieck ist konstruierbar).

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | [illegible] | [illegible] | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | [illegible] | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | [illegible] | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | 2 | 2 | 2 | 2 |

*Grafik: Günther Weber, Brilon*

Im Beispiel ist 2 + 2 < 5 (Dreieck nicht konstruierbar) und 2 +3 > 4 (Dreieck konstruierbar). Das Herausfinden der konstruierbaren Dreiecke kann arbeitsteilig geschehen. Im Anschluss an die Bearbeitung sammeln die Lernenden die Ergebnisse, indem sie die Anzahl der konstruierbaren Dreiecke nennen und die Anzahlen aufsummieren. Gleiches kann bei Aufgabe 1c geschehen.

Sollen die Jugendlichen Aufgabe 1b und 1c mithilfe der Kombinationen lösen, so geben Sie als Lehrkraft den Tipp, dass es einfacher ist, die Augenzahlen der Dreierwürfe nach Größe geordnet anzugeben und sich anschließend zu überlegen, wie oft es so eine Kombination gibt.

Vor der Bearbeitung der weiteren Aufgaben sollten Sie die Wahrscheinlichkeiten für ein konstruierbares, ein gleichseitiges oder ein gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck noch einmal herausstellen, z. B mithilfe einer Tafelanschrift.

Die Aufgaben 1b und 1c können Sie auch als vorbereitende Hausaufgabe stellen.

Aufgabe 3 lässt sich günstiger mit den Kombinationen der Dreierwürfe als mit den Tabellen lösen. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen sollten Sie, als Lehrkraft, die Kombinationen vorgeben. Im Unterrichtsgespräch kann dann geklärt werden, wie oft die einzelnen Kombinationen vorkommen.

Bei Aufgabe 4 kann anhand der Werte der Tabellenkalkulation einmal nachgeschaut werden, bei welchem Dreierwurf das gleichseitige Dreieck konstruiert werden konnte. Gleiches gilt für die Ereignisse von Aufgabe 5.

Nach der Bearbeitung von Aufgabe 5 ändern schnelle, leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die Simulation so ab, dass auch der Dreierwurf mit einem Tetraeder simuliert werden kann. Leistungsstarke Klassenmitglieder können ebenso die Aufgabenstellung der Aufgabe 8 auf den Dreierwurf mit einem Würfel übertragen.

# M 1 Tabellen Konstruierbarkeit

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | [illegible] | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | [illegible] | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | [illegible] | 2 | 2 | [illegible] | 2 |

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | [illegible] |

| W2 \ W1 | 1 | [illegible] | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | [illegible] | 4 | 4 | 4 |
| 2 | [illegible] | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | [illegible] | 4 | 4 | 4 | 4 |
| [illegible] | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| [illegible] | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [illegible] |
| 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | [illegible] | 5 |
| 3 | 5 | 5 | [illegible] | 5 | 5 | 5 |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [illegible] |
| 5 | 5 | [illegible] | 5 | [illegible] | [illegible] | 5 |
| 6 | 5 | 5 | [illegible] | 5 | 5 | 5 |

| W2 \ W1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

*Grafik: Gü[illegible]ther We[illegible] Brilon*

## M 2 Aufgaben

Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten ganzzahligen Seitenlängen konstruiert werden. Dazu werden drei Laplace-Würfel gleichzeitig geworfen. Die jeweils geworfene Augenzahl soll die ganzzahlige Länge einer Seite in cm angeben.

1.
   a) Simulieren Sie das Zufallsexperiment mithilfe der Datei „Würfeln und Dreieckskonstruktion.xlsx“ 1000-mal. Erläutern Sie die Formeln in den Zellen.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus den zufällig gewählten ganzzahligen Seitenlängen ein Dreieck konstruiert werden kann. Sie können dazu die Tabellen aus **M 1** verwenden.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus den zufällig gewählten ganzzahligen Seitenlängen ein **gleichschenkliges** Dreieck konstruiert werden kann. Auch hier können die Tabellen aus **M 1** hilfreich sein.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck konstruierbar ist, wenn
   a) genau zwei Seiten 4 cm lang sind,
   b) wenn der Umfang des Dreiecks 10 cm beträgt.

3. Das Dreieck ist **konstruierbar**.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) das Dreieck gleichschenklig ist,
   b) der Umfang des Dreiecks mindestens 15 cm beträgt,
   c) genau eine Seite 3 cm lang ist,
   d) die Seitenlängen des Dreiecks aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind,
   e) der Längenunterschied zwischen der längsten und kürzesten Dreieckseite genau 2 cm beträgt.

4. Bestimmen Sie, wie oft man die drei Würfel mindestens werfen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % aus den Seitenlängen mindestens einmal ein gleichseitiges Dreieck erhält.