# Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke

© Yellow Dog Productions/The Image Bank

Kann man beim Roulettespiel sicher gewinnen? Wie begleichen Versicherungen hohe Schadensummen? Im vorliegenden Beitrag gehen die Jugendlichen diesen und vielen weiteren spannenden Fragen auf den Grund und beantworten sie durch anwendungsbezogenen Umgang mit Erwartungswerten, Varianzen und Standardabweichungen. Dabei stärken die Schülerinnen und Schüler durch motivierende Elemente ihre Kompetenzen im stochastischen Modellieren sowie im realitätsnahen Argumentieren und entwickeln außerdem ihre digitalen Fähigkeiten.

# Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

## Oberstufe (grundlegend)

von Dr. Jürgen Franke







## Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Erwartungswerte, Varianzen und Standardabweichungen von Datensätzen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu berechnen. Sie begreifen, dass Verteilungen mit gleichem Erwartungswert trotzdem sehr unterschiedlich gestreut sein können. Der Beitrag hat einen starken Alltags- und Praxisbezug, beinhaltet z. B. Aufgaben zu Glücksspielen und Versicherungen, sodass die Jugendlichen die Relevanz der Stochastik im täglichen Leben erkennen.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:
**AB** Arbeitsblatt **FS** Formelsammlung **TK** Tippkarten

| Thema | Material | Methode |
|---|---|---|
| Erwartungswert und Standardabweichung | M1 | AB, FS |
| Anwendungsaufgaben | M2 | AB |
| Tippkarte | M3 | TK |
| Versicherung | M4 | AB |
| Lotto | M5 | AB, FS |
| Roulettespiel | M6 | AB |
| Martingalespiel | M7 | AB |

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Ereigniswahrscheinlichkeiten, Baumdiagramm, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung
**Medien:** Tabellenkalkulationsprogramm
**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

### Erklärung zu den Symbolen

| | | |
|---|---|---|
| einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau |
| Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben. | | |

**Beispiel 1**

Eine Mathematikklassenarbeit brachte in einer Klasse von 20 Schülerinnen und Schülern folgende Ergebnisse.

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Noten $x_i$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Anzahl $k_i$** | 3 | 2 | 4 | 5 | 5 | 1 |

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Noten $x_i$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Rel. Häufigkeit $h_i$** | 3/20 | 2/20 | 4/20 | 5/20 | 5/20 | 1/20 |

Wir definieren eine Zufallsgröße

X := „Mathenote der Klassenarbeit von 1–6“

und definieren die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse:

$$P(X = x_i) = h_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

Anschließend berechnen wir den Erwartungswert der Zufallsgröße X mit der Formel

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)\ .$$

Es ergibt sich somit

$$\mu(X) = 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{5}{20} + 5 \cdot \frac{5}{20} + 6 \cdot \frac{1}{20} = 3{,}5\ .$$

Zur Beantwortung der Frage, definieren wir eine Zufallsvariable:

X := „Insgesamte Verspätung in Minuten"

Diese kann vier unterschiedliche Werte annehmen. Damit ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_i}$ | 0 | 5 | 30 | 35 |
| $\mathbf{P(X = x_i)}$ | 0,64 | 0,16 + 0,04 = 0,2 | 0,128 | 0,032 |

Für den Erwartungswert erhält man:

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P(X = x_i)\\ &= 0 \cdot 0{,}64 + 5 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}128 + 35 \cdot 0{,}032\\ &= 0 + 1 + 3{,}84 + 1{,}12\\ &= 5{,}96\end{aligned}$$

Es gibt noch einen anderen Zug, der direkt, ohne Umsteigen, ans Ziel fährt. Dieser braucht laut Fahrplan 5 Minuten länger als die Umsteigebeziehung und ist erfahrungsgemäß zwar auch in 80 % seiner Fahrten pünktlich, dafür verspäten sich 10 % der Züge um 5 Minuten und 10 % sogar um 10 Minuten.

Für den Vergleich mit der Umsteigebeziehung bedeutet dies für den Direktzug: In 80 % der Fahrten braucht er 5 Minuten länger, in 10 % 10 Minuten länger, in 10 % 15 Minuten länger.

Der Erwartungswert der Direktverbindung ist dann

$$\mu(Y) = 5 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}1 = 4 + 1 + 1{,}5 = 6{,}5\,.$$

Mit der Umsteigeverbindung kommt man erwartungsgemäß 6,5 – 5,96 = 0,54 Minuten früher an. Damit schneidet die Direktverbindung im Erwartungswert schlechter ab.

Wir berechnen jetzt noch die Varianzen bzw. Standardabweichungen für die beiden Verbindungen. Diese zeigen an, wie weit verstreut die einzelnen Werte der Zufallsgrößen von ihren Erwartungswerten sind.