Unabhängigkeit von Ereignissen – ein anwendungsorientierter Einstieg

Carlo Vöst

Die Lernenden erkennen in diesem Unterrichtsmaterial, dass sich die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse in der Mathematik deutlich von der gängigen Alltagsvorstellung unterscheidet. Am Beispiel eines Baumdiagramms wird zunächst die stochastische Unabhängigkeit definiert. Anschließend erarbeiten sich die Lernenden weitere Erkennungsmerkmale und den Zusammenhang mit dem umgangssprachlichen Begriff der Unabhängigkeit. Schließlich übt Ihre Klasse das erworbene Wissen anhand von zahlreichen Aufgaben ein, ehe eine Lernerfolgskontrolle die Einheit abrundet.

RAABE
KLASSE SCHULE

Unabhängigkeit von Ereignissen – ein anwendungsorientierter Einstieg

Oberstufe (grundlegend)

Carlo Vöst

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

wie man in der Mathematik zum Begriff der stochastischen Unabhängigkeit zweier Ereignisse gelangt. Durch die Definition der Unabhängigkeit erarbeiten sich die Lernenden weitere Erkennungsmerkmale dieser Thematik. Den Schülerinnen und Schülern wird der Zusammenhang mit dem umgangssprachlichen Begriff der Unabhängigkeit aufgezeigt. Auch von Interesse in diesem Zusammenhang ist eine „Fast-Unabhängigkeit" und wie die Unabhängigkeit mit der Unvereinbarkeit zweier Ereignisse zusammenhängt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt **LEK** Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Beispiel, Definition	M1	AB
Merkmale der stochastischen Unabhängigkeit	M2	AB
Die „Fast-Unabhängigkeit" zweier Ereignisse	M3	AB
Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit	M4	AB
Stochastische und kausale Abhängigkeit	M5	AB
Aufgaben	M6	AB
Klassenarbeit	M7	LEK

Kompetenzprofil:

Inhalt: Grundsätzliche Definition der Unabhängigkeit und verschiedene gleichbedeutenden Erkennungsmerkmale, Erarbeitung des Begriffs der Fast-Unabhängigkeit zweier Ereignisse, Zusammenhang mit der Unvereinbarkeit, Aufzeigung des Unterschieds zwischen der stochastischen und der kausalen Unabhängigkeit.

Medien: TR

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), kommunizieren (K6)

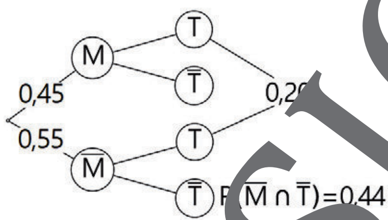
Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

M1 Beispiel und Definition

45 % der Besucher einer Theateraufführung sind männlich, 20 % aller Besucher bleiben während der Pause im Theaterraum, 44 % der Besucher sind weiblich und gehen in der Pause aus dem Theaterraum.

Wir stellen die Situation in einem Baumdiagramm dar. Aufgrund der Angaben ergibt sich folgende Situation (M: „männlich“; T: „Person bleibt im Theaterraum“):



Skizze: Carlo [illegible]

Es sollen nun alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.
Aufgrund der Formel zur Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}44}{0{,}55} = 0{,}8$$

$$\Rightarrow P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$\Rightarrow P(\overline{M} \cap T) = 0{,}55 \cdot 0{,}2 = 0{,}11$$

$$P(T) = P(\overline{M} \cap T) + P(M \cap T)$$

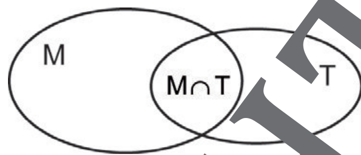
$$\Leftrightarrow 0{,}2 = 0{,}11 + P(M \cap T)$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap T) = 0{,}09$$

$$\Rightarrow P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0{,}09}{0{,}45} = 0{,}2$$

$$\Rightarrow P_M(\overline{T}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$\Rightarrow P(M \cap \overline{T}) = 0{,}45 \cdot 0{,}8 = 0{,}36$$



Skizze: Carlo Vöst

3. Wir betrachten noch einmal das Baumdiagramm und können ablesen:

$$\underbrace{P_M\left(\overline{T}\right)}_{0{,}8} = \underbrace{P\left(\overline{T}\right)}_{0{,}36+0{,}44=0{,}8},$$

was dann wiederum bedeutet, dass M und $\overline{T}$ unabhängig sind.

Allgemeine Begründung:

$$\begin{aligned} P\left(M \cap \overline{T}\right) &\overset{\text{siehe Grafik}}{=} P(M) - P(M \cap T) \\ &\underset{\text{M,T unabh.}}{=} P(M) - P(M) \cdot P(T) \\ &= P(M) - P(M) \cdot P(T) \\ &= P(M) \cdot \left(1 - P(T)\right) = P(M) \cdot P\left(\overline{T}\right) \end{aligned}$$

q.e.d.

Entsprechend lassen sich dann auch die folgenden Aussagen beweisen: $\overline{M}$ und T sind unabhängig, $\overline{M}$ und $\overline{T}$ sind unabhängig.

4. Man sieht anhand des Baumdiagramms, dass gilt:

$$P_M(T) = P_{\overline{M}}(T)$$

Dies ist immer so, wenn zwei (beliebige) Ereignisse M und T unabhängig sind.

Begründung:

$$\begin{aligned} & P_M(T) = P_{\overline{M}}(T) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{P\left(\overline{M} \cap T\right)}{P\left(\overline{M}\right)} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{P(M) \cdot P(T)}{P(M)} = \frac{P\left(\overline{M}\right) \cdot P(T)}{P\left(\overline{M}\right)} \\ \Leftrightarrow\ & P(T) = P(T) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt eine wahre Aussage dar.

Da Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist also auch die Behauptung wahr.

5. Von zwei Ereignissen E und F ist bekannt:
   $P(E) = 0{,}25$
   $P(F) = 0{,}64$
   $P(\bar{E} \cup \bar{F}) = 0{,}82$

   a) Zeigen Sie, dass E und F stochastisch abhängig sind.
   b) Ändern Sie den Wert von $P(\bar{E} \cup \bar{F})$ so ab, dass die Ereignisse E und F stochastisch unabhängig werden.

6. In einem Sporthotel werden die Gäste nach ihren Aktivitäten befragt. Es werden insgesamt 500 Hotelgäste befragt. 150 geben an, jünger als 30 Jahre zu sein. Von diesen geben 30 Golf als ihre Lieblingssportart an. Insgesamt wählen 100 Personen Golf als ihre bevorzugte Sportart. Für einen zufällig ausgewählten Hotelgast werden die Ereignisse „der Hotelgast ist jünger als 30“ und „die Lieblingssportart des Gastes ist Golf“ betrachtet. Untersuchen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel, ob diese Ereignisse stochastisch unabhängig sind

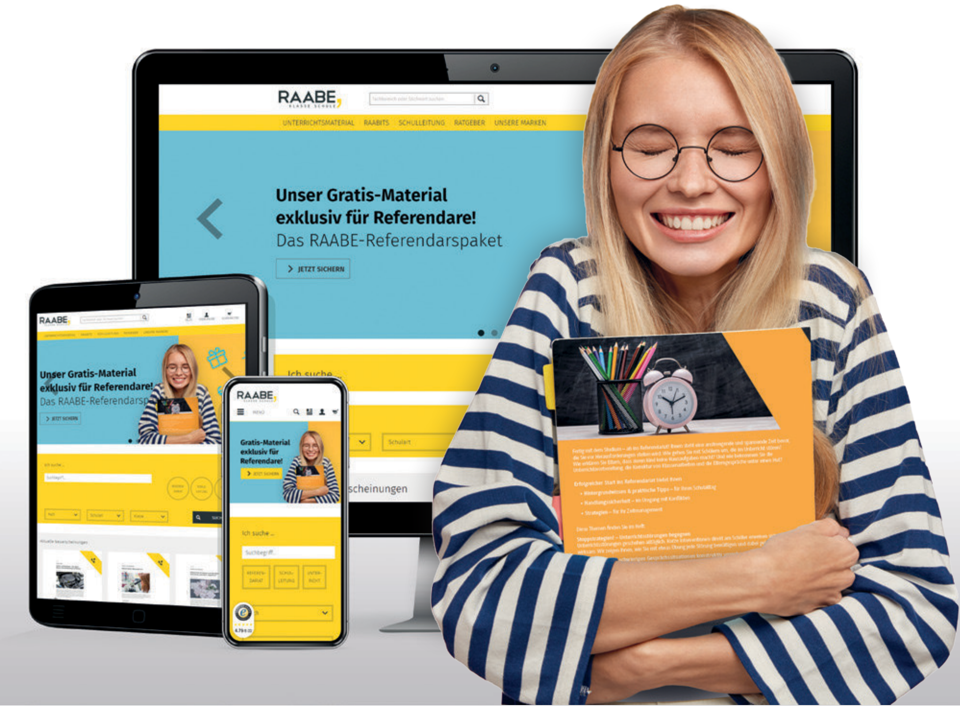
7. 800 Beschäftigte einer großen Firma werden in einer Umfrage zu ihren Ess- und Trinkgewohnheiten in der Mittagspause befragt. Dabei ergibt sich, dass 280 Angestellte in der betriebseigenen Cafeteria eine warme Mahlzeit wollen (Ereignis A), während 420 Personen dort ein Getränk zu sich nehmen (Ereignis B). 247 Angestellte gehen entweder überhaupt nicht in die Cafeteria oder verzichten dort sowohl auf die warme Mahlzeit als auch auf ein Getränk.

   a) Berechnen Sie $P(A \cap B)$. [Ergebnis zur Kontrolle: $\frac{147}{800}$]
   b) Zeigen Sie, dass gilt: $P_B(A) = P(A)$, und dass somit die Ereignisse A und B (stochastisch) unabhängig voneinander sind.

8. Weil sich in einer Region die Sterbefälle aufgrund von Lungenkrebs häufen, will das zuständige Gesundheitsamt eine Untersuchung über den eventuellen Zusammenhang von Lungenkrebs als Todesursache mit dem Rauchen durchführen. Es soll eine Statistik aufgebaut werden, die beinhaltet, ob die Person an Lungenkrebs gestorben ist (Ereignis L) und ob sie geraucht hat (Ereignis R). Es ergibt sich, dass von 5000 Verstorbenen 600 an Lungenkrebs starben und dass 3256 weder an Lungenkrebs starben, noch Raucher waren.
   Bestimmen Sie, wie viele Rauchende dem Lungenkrebs zum Opfer gefallen wären, wenn man davon ausgehen könnte, dass die Todesursache Lungenkrebs vom Rauchen unabhängig ist.

RAABE
KLASSE SCHULE

Sie wollen mehr für Ihr Fach?
Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download
im RAABE Webshop.



- **Über 5.000 Unterrichtseinheiten** sofort zum Download verfügbar
- **Webinare und Videos** für Ihre fachliche und persönliche Weiterbildung
- **Attraktive Vergünstigungen** für Referendar:innen mit bis zu 15% Rabatt
- **Käuferschutz** mit Trusted Shops

TRUSTED SHOPS GUARANTEE

Jetzt entdecken:
www.raabe.de