Die Poisson-Verteilung – Verteilung seltener Ereignisse

Alfred Müller

© Chris Jongkind / Moment / Getty Images Plus

Bei der Poisson-Verteilung handelt es sich um eine diskrete Verteilung, die auch als Verteilung der seltenen Ereignisse bekannt ist. In diesem Material lernen die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Arten kennen, auf die sie sich verwenden lässt.

Zum einen kommt sie als Näherung für eine Binomialverteilung, also für eine große Zahl von Bernoulli-Experimenten zum Einsatz. Die zweite Einsatzmöglichkeit besteht darin, bei Ereignissen, bei denen nur ein Mittelwert bekannt ist, wie etwa der Untersuchung durchschnittlicher Häufigkeiten in einem Zeitintervall, kann mit ihrer Hilfe auf die Ereigniswahrscheinlichkeiten geschlossen werden. Zuletzt dient sie zur Beschreibung und Überprüfung von empirisch betrachteten Verteilungen.

Die Schülerinnen und Schüler lernen zunächst anhand durchgerechneter Beispiele die einzelnen Verwendungsarten kennen, ehe sie das Gelernte selbst in einer Reihe von Aufgaben anwenden.

Poisson-Verteilung – Verteilung seltener Ereignisse

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Einsatzmöglichkeiten der Poisson-Verteilung. Anhand durchgerechneter Beispiele erkennen sie, wie sie dabei vorgehen müssen, ehe sie das Gelernte in einer Reihe von Aufgaben praktisch anwenden.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt **Info** Information

Thema	Material	Methode
Poisson-Näherung der Binomialverteilung	M2	Info
Aufgaben: Poisson-Näherung der Binomialverteilung	M3	AB
Poisson-Verteilung mit dem Parameter μ	M4	Info
Aufgaben: Poisson-Verteilung mit dem Parameter μ	M5	AB
Poisson-Verteilung und empirische Verteilung	M6	Info
Aufgaben: Poisson-Verteilung und empirische Verteilung	M7	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Poisson-Verteilung, Poisson-Näherung, Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Mittelwert, Erwartungswert, empirische Verteilung, diskrete Zufallsgröße,
Medien: GTR, Tabellenwerk/Formelsammlung
Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

M2 Poisson-Näherung der Binomialverteilung

In der stochastischen Praxis kommen bei Bernoulli-Experimenten häufig Ereignisse vor, die sehr selten eintreten, d. h., der Wert für den Parameter p der zugrunde liegenden Bernoulli-Kette ist sehr klein. Man muss also sehr lange Bernoulli-Ketten betrachten, um überhaupt verwertbare Ereignisse bzw. einen „feststellbaren" Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ zu erhalten.

Beispiel:

Hühnereier mit zwei Dottern (= „Zweidottereier") treten mit der sehr kleinen Wahrscheinlichkeit p = 0,002 auf.

1. Unter wie vielen Hühnereiern erwartet man ein Zweidotterei?
2. Wie viele Eier muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein Zweidotterei zu finden?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 10000 Eiern mehr als 20 Zweidottereier?

Lösung:

1. Für den Erwartungswert gilt: $\mu = n \cdot p = 1$

   Daraus erhält man: $n = \frac{\mu}{p} = \frac{1}{0{,}002} = 500$

   Unter jeweils 500 Eiern erwartet man ein Zweidotterei.
2. Es gilt: $P(\text{mindestens ein Zweidotterei}) = 1 - P(\text{kein Zweidotterei})$

   $1 - 0{,}998^n > 0{,}99$

   $0{,}998^n < 0{,}01$

   $n \cdot \ln 0{,}998 < \ln 0{,}01 \quad | : \ln 0{,}998 \; (<0 \Rightarrow \text{gedrehtes Relationszeichen})$

   $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}998} \approx 2300{,}28 \Rightarrow n \geq 2301$

   Man muss mindestens 2301 Hühnereier untersuchen.
3. Es liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern p = 0,002 und n = 10000 vor. Gesucht ist folgende Wahrscheinlichkeit

   $B_{0,002}^{10000}(Z > 20) = 1 - B_{0,002}^{10000}(Z \leq 20)$

Da die Länge n der Bernoulli-Kette sehr groß ist, erfordert es einen erhöhten Rechenaufwand, um die Wahrscheinlichkeiten von solchen Ereignissen zu bestimmen. Eine Näherungslösung ergibt sich mit den folgenden Überlegungen:

Da man sich bei solchen (seltenen) Ereignissen im Allgemeinen für Wahrscheinlichkeiten in der Umgebung des Erwartungswertes μ der zugrunde liegenden Binomial-

Beispiel:

Bei der automatischen Abfüllung eines Arzneimittels beträgt die Sicherheit für die richtige Stückzahl in der Packung 99,5 %.

1. Es werden 200 Packungen abgefüllt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man genau eine mit einer falschen Stückzahl?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei 2000 Packungen
   a) mehr als zehn,
   b) weniger als sechs,
   c) höchstens dreizehn, aber mehr als sieben mit falscher Füllzahl?
3. Eine andere Maschine verpackt so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei 1000 Packungen keine falsch gefüllte feststellt, mehr als 50 % beträgt. Bestimmen Sie die Füllsicherheit dieser Maschine.

Lösung:

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Packungen mit falscher Füllzahl an.

1. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

   $B_{0,005}^{200}(Z=1)=\binom{200}{1}\cdot 0,005\cdot 0,995^{199}=36,88\,\%$

   Poisson-Näherung mit $\mu = n\cdot p = 200\cdot 0,005 = 1$:

   $B_{0,005}^{200}(Z=1)\approx P_1(Z=1)=P_1(Z\le 1)-P_1(Z=0)=$

   $=0,73576-0,36788=0,36788=36,79\%$

2. Verwendet wird die Poisson-Näherung mit $\mu = n\cdot p = 2000\cdot 0,005 = 10$
   a) $P_{10}(Z>10)=1-P_{10}(Z\le 10)=1-0,58304=0,41696=41,70\%$
   b) $P_{10}(Z<6)=1-P_{10}(Z\le 5)=0,0671=6,71\%$
   c) $P_{10}(7<Z\le 13)=P_{10}(Z\le 13)-P_{10}(Z\le 7)=0,86446-0,22022=0,64424=64,42\%$

3. Es muss gelten:

   $B_{1-p'}^{1000}(Z=0)>0,5$

   $\binom{1000}{0}\cdot(1-p')^0\cdot p'^{1000}>0,5$

   $1\cdot 1\cdot p'^{1000}>0,5 \Rightarrow p'>\sqrt[1000]{0,5}=99,93\%$

   Die Füllsicherheit der Maschine müsste größer als 99,93 % sein.

   Poisson-Näherung mit p = Fehlerwahrscheinlichkeit:

   $\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}=\frac{(n\cdot p)^0}{0!}\cdot e^{-n\cdot p}=e^{-n\cdot p}>0,5$

   $-n\cdot p>\ln 0,5$

   $p<\frac{\ln 0,5}{-n}=0,00069\Rightarrow 1-p>0,99931=99,93\%$

   Es ergibt sich die gleiche Füllsicherheit.