C.4.12

Urnenmodelle

Kombinatorik und Urnenmodell – Grundlagen, Beispiele und Aufgaben

Carlo Vöst

© Daft Lion Studio / E+ / Getty Images Plus

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet innerhalb der Stochastik, in dem es um die Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen von Objekten geht. Innerhalb der Kombinatorik wird dann zwischen Permutationen, Kombinationen und Variationen unterschieden. Erfahrungsgemäß gehören Aufgabenstellungen aus der Kombinatorik zu den schwierigsten Problemen aus dem Bereich der Stochastik. Um sich einen gut nachvollziehbaren Zugang zu diesem Gebiet zu verschaffen, greift dieser Beitrag vor allem auf das sogenannte Urnenmodell zurück. Dieses Modell (Ziehen aus einer Urne) ist deshalb auch so wichtig, weil sich einerseits jedes Zufallsexperiment der Stochastik in dieses Modell übertragen lässt und sich andererseits sämtliche Berechnungsformeln der Kombinatorik aus dem Urnenmodell herleiten lassen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	9–11 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Problemlösekompetenz, Textkompetenz, Mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Kommunizieren
Methoden:	Analyse, Auswertung, Bildanalyse, Datenauswertung, Diskussion, Textarbeit, Übung
Thematische Bereiche:	Urnenmodell, kombinatorische Teilgebiete mit den zugehörigen Bezeichnungen und Formeln

Fachliche Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen wichtige Grundbegriffe der Stochastik wie Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis und den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Auch die Darstellung der möglichen Ergebnisse in einem Baumdiagramm sollte ihnen vertraut sein. Darüber hinaus sind für die Jugendlichen, abgesehen von einem einigermaßen geschickten Umgang mit dem Taschenrechner, keine weiteren Grundkenntnisse nötig.
Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan für die Sekundarstufe II, Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
(aufgerufen am 10.06.2024)
findet sich unter anderem folgende Kompetenzerwartung
Die Schülerinnen und Schüler ...

– verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
– erklären (...) [den] Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten.

Didaktisch-methodische Hinweise

Bei **Aufgabe 1)** sollten Sie als Lehrkraft die Glücksspiele Lotto und Toto etwas näher erklären, bevor Sie zur Lösung der gestellten Aufgaben kommen. Beim Toto kann auch ein (angedeutetes) Baumdiagramm zur Unterstützung herangezogen werden.

Bei **Aufgabe 2)** kann darauf eingegangen werden, warum es sinnvoll ist, bei den Kennzeichen auf Vokale zu verzichten. Dies sorgt für Auflockerung des Unterrichts, wenn den Schülerinnen und Schülern witzige Kombinationen einfallen.

In der **Aufgabe 3)** können zur Vertiefung statt des Wortes MISSISSIPPI auch andere Worte herangezogen werden, bei denen bestimmte Buchstaben mehrfach vorkommen. Dies kann auch die Fantasie der Lernenden entsprechend anregen.

Die **Aufgabe 4b)** eignet sich aufgrund der kombinatorischen Anforderungen vor allem für leistungsstärkere Jugendliche.

Die **Aufgabe 5)** könnten Sie als Lehrkraft für Ihre Klasse bezüglich der Aufteilung der Anzahlen von Mädchen und Jungen umformulieren.

Auch in der **Aufgabe 7b)** ist es so, dass sie eher für die kombinatorisch interessierteren Jugendlichen geeignet ist. Diese Aufgabe erfordert auch ein stärkeres Anleiten von Ihrer Seite als Lehrkraft.

Aufgabe 8) ist besonders interessant, weil sie verschiedene Teilgebiete der Kombinatorik abdeckt.
Die verschiedenen Möglichkeiten, welche sich in **Aufgabe 10b)** ergeben, könnten Sie mit den Jugendlichen im Klassenzimmer live simulieren, was ebenfalls zur Auflockerung Ihres Unterrichts beiträgt.

Das Urnenmodell

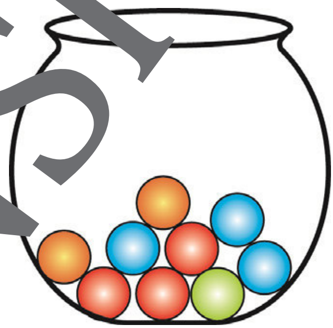
M 1

Vorstellung

Das Wort Urnenmodell besteht aus den Wortteilen „Urne“ und „Modell“.
Die Urne ist ein beliebiges undurchsichtiges Gefäß, in das man (ohne den Inhalt zu sehen) hineinfassen kann, um etwas (meistens eine oder mehrere Kugeln) herauszuziehen.
Das Wort „Modell“ wird benutzt, weil es sich dabei oft nur um eine Vorstellung handelt, um einen komplexen Sachverhalt zu vereinfachen und damit besser verstehen zu können.

Zufallsexperiment

In der Urne befinden sich völlig gleichartige Kugeln, welche sich entweder durch ihre Farbe oder durch ihre Aufschrift unterscheiden. Man zieht nun aus dieser Urne nach einem bestimmten Verfahren, z.B. mit einem Griff oder nacheinander, etc., eine vorgegebene Anzahl von Kugeln (ohne hineinzuschauen, „blind“). Anschließend legt man entsprechend der Aufgabenstellung die gezogenen Kugeln zurück oder auch nicht. Die Menge der gezogenen Kugeln stellt das Ergebnis des Zufallsexperiments dar.



Grafik: Carlo Vöst

Bedeutung des Urnenmodells

Es kann sich jedes Zufallsexperiment (mit endlichem Ergebnisraum und rationalen Wahrscheinlichkeitswerten) durch ein äquivalentes Urnenmodell ersetzen lassen. Somit kann ein beliebiges Zufallsexperiment in eine Standardsituation überführt werden, die relativ übersichtlich und einfach zu handhaben ist. Damit können auch unterschiedlichste Problemstellungen durch dasselbe Urnenmodell beschrieben werden und hinsichtlich ihrer strukturellen Gemeinsamkeiten verglichen werden. Ferner hilft das so verwendete Urnenmodell beim Finden von Lösungen von sonst relativ unübersichtlichen Problemstellungen.

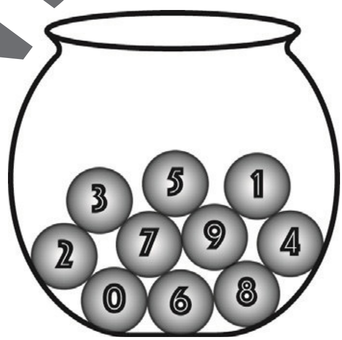
Zuletzt soll noch erwähnt sein, dass das Urnenmodell schon eine sehr lange Geschichte und damit auch eine große Tradition in der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzt. Dieses Konzept des Urnenmodells lässt sich nämlich bis ins Alte Testament und das antike Griechenland zurückverfolgen. Erstmals schriftlich erwähnt wird es von dem Schweizer Mathematiker Jacob Bernoulli (1655–1705) in seinem Werk *Ars Conjectandi*, das erst 1713, also 8 Jahre nach seinem Tod erschien.

Beispiel für die Überführung eines Zufallsexperiments ins Urnenmodell

Beim Werfen eines (sechsseitigen) Würfels handelt es sich um ein einstufiges Zufallsexperiment, das sich leicht in das Urnenmodell übersetzen lässt. In einer Urne befinden sich sechs gleichartige Kugeln, die mit den Ziffern 1 bis 6 beschriftet sind. Man zieht jeweils eine Kugel aus der Urne und legt sie anschließend wieder zurück („mit Zurücklegen"). Die gezogene Zahl entspricht dann der gewürfelten (Augen-)Zahl.

Verschiedenes Ziehen aus einer Urne

Wir betrachten in diesem Kapitel immer folgendes Beispiel und verallgemeinern anschließend.
In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, die von 0 bis 9 durchnummeriert sind. Ansonsten sind die Kugeln völlig gleichartig.
Man zieht 4 Kugeln und fragt jeweils nach der Mächtigkeit des Ergebnisraums, d.h. man fragt danach, wie viele verschiedene Ergebnisse möglich sind.
Hinweis: Genauere Herleitungen der Berechnungsformeln finden Sie im Material **M 2.**



Grafik: Carlo Vöst