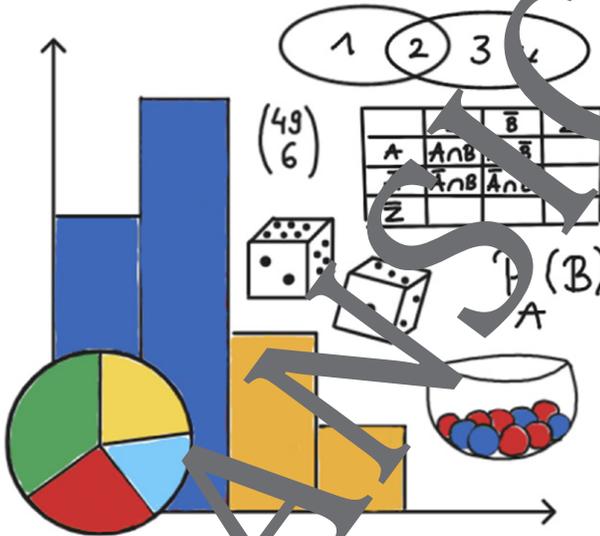


A.3.8

Zufallsexperimente – Vermischte Aufgaben

Wahrscheinlichkeiten bestimmen, darstellen und auswerten

Dr. Günter Scheu



© RAABE 2025

© Sabine Ziehmer, Dr. Günter Scheu

Daten begegnen den Schülerinnen und Schülern überall im Alltag und in verschiedenen Darstellungsformen. Das vorliegende Material erklärt anhand praxisnaher Daten die verschiedenen Darstellungsformen zur Gewinnung von Informationen. Die Schülerinnen und Schüler lernen anhand verschiedener Beispiele die kennzeichnenden Begriffe zur Darstellung und Auswertung der Daten kennen und berechnen im Rahmen zahlreicher Übungsaufgaben die üblichen Kenngrößen und machen sich über ihre Vor- und Nachteile Gedanken. Mithilfe einer Klassenarbeit überprüfen Sie schließlich den Kenntnisstand der Lernenden.

Das Material wurde entsprechend den Lehrplänen für die Mittelstufe entwickelt, lässt sich in allen Klassenstufen zur Wiederholung einsetzen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	8/9/10
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)
Methoden:	Übung, Textarbeit, Analyse, Computer- und Softwareeinsatz
Thematische Bereiche:	Zufallsexperiment, Ergebnismenge, Laplace'sches und unmögliches Ereignis, Laplace-Experiment, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, empirisches Gesetz der großen Zahlen, mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramm, Pfadregeln, Ziehen mit oder ohne Zurücklegen, Anzahlen berechnen, Binomialkoeffizient, Mengen, bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, stochastische Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Ereignissen, Zufallsgreife, Erwartungswert, Gewinnspiel, Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung, kumulierte Wahrscheinlichkeit.

Fachliche Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler ...

- entscheiden für verschiedene Alltagssituationen, ob sich darin Abläufe finden, bei denen es sich um Zufallsexperimente handelt. Sie bestimmen eine geeignete Ergebnismenge, insbesondere mithilfe eines Baumdiagramms. Dabei beschreiben sie einfache Ereignisse, die mit der Alltagssituation verknüpft sind, zum einen im Wortlaut und darüber hinaus als Teilmengen der Ergebnismenge und nutzen die Algebra, um weitere Ereignisse zu erzeugen und um Zusammenhänge zwischen verschiedenen Ereignissen darzustellen.
- bestimmen für eine endliche Anzahl von Wiederholungen eines einfachen Zufallsexperiments die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen.
- berechnen für einfache Laplace-Experimente die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. Für mehrstufige Zufallsexperimente ermitteln sie die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe eines Baumdiagramms unter Anwendung der Pfadregeln. Sie berücksichtigen dabei das Ziehen mit und ohne Zurücklegen.

- bestimmen für Zufallsexperimente, in denen es um das Auftreten von zwei Merkmalen geht, mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Verknüpfungen dieser beiden Merkmale.
- verwenden die Binomialverteilung adäquat zur Modellierung von zufälligen Vorgängen.
- arbeiten sicher mit der Binomialverteilung, ihren Kenngrößen und ihrer typischen Gestalt.
- geben mithilfe der Binomialverteilung auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Anteil der Erfolge in einer Bernoulli-Kette an.

Didaktisch-methodische Hinweise

Das dargestellte Thema ist im Bildungsplan von Baden-Württemberg für die Klassen 8, 9 und 10 verankert.

Bei der Auswertung der Daten müssen immer wieder Werte berechnet werden. Für diese Berechnungen ist ein Taschenrechner (WTR) sehr hilfreich. Für das Zeichnen von Diagrammen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen empfiehlt sich das Programm GeoGebra oder auch Excel. Hierzu gibt es im Internet viele Hilfen.

Es gibt auch eine App von GeoGebra, die es erlaubt, die hervorragenden Funktionen von GeoGebra auch auf dem Smartphone zu benutzen. Die App ist funktional, die Bedienung ist sehr intuitiv, und der Funktionsumfang ist sehr groß.

Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit geordnet, um das Thema geeignet zu lernen und zu üben. Lösungen sind vorhanden.

Bei manchen Aufgaben kann eine Veranschaulichung bzw. Kontrolle der Lösung mithilfe von GeoGebra hilfreich sein. Ein Manko dabei sind wenige Befehle von GeoGebra.

Auch in Word gibt es vielfältige Möglichkeiten zur einfachen Erstellung von Diagrammen.

Themen

Die Stochastik ist ein Gebiet der Mathematik und fasst die Teilgebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zusammen.

Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** befasst sich mit der Modellierung und der Untersuchung von Zufallsgeschehen, d. h. mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse von Zufallsexperimenten.

Eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also die Untersuchung von Experimenten, deren Ausgang zufällig ist. Ziel dieser Untersuchung ist es, mögliche Gesetzmäßigkeiten für Voraussagen zu finden. Die Grundlage dafür bilden Zufallsexperimente. Diese können mit unterschiedlichen Zufallsgeräten, wie z. B. Münzen, Würfeln, Urnen, Glücksrädern, durchgeführt werden.

Die einfachsten Zufallsexperimente sind dadurch gekennzeichnet, dass jeder Versuchsausgang gleich wahrscheinlich ist. Sie werden Laplace-Experimente genannt. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der einzelnen Ereignisse sind bei ihnen alle gleich groß. Diese Information reicht aus, um Wahrscheinlichkeiten konkret zu berechnen. In der Praxis können mit relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.

Ereignisse können in verschiedener Weise in Beziehung zueinander stehen, und ein Ereignis kann aus anderen Ereignissen zusammengesetzt werden. Da Ereignisse Teilmengen der Ergebnismenge sind, können ihre Beziehung in Begriffen der Mengenlehre ausgedrückt und wie Mengen miteinander verknüpft werden.

Zufallsexperimente bestehen oft aus mehreren Schritten, die hintereinander ausgeführt werden. Dabei ist jeder Schritt ein eigenes Zufallsexperiment, dessen Details vom Ausgang des vorigen Schritts abhängen können. Für gewisse Typen von Zufallsexperimenten stehen rechnerische Algorithmen zur Verfügung und es gibt auch die Baumdiagramme als relativ einfache grafische Darstellungsform.

Viele Experimente lassen sich mit einem Binomialexperiment modellieren, wobei ein Ergebnis als „Treffer“ und alle anderen Ergebnisse als „Nichttreffer“ definiert werden. Zu einer Binomialverteilung gehören mehrere Bernoulli-Experimente. Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann berechnet werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis auftritt. Auch die Gegenwahrscheinlichkeit oder das Aufsummieren einzelner Wahrscheinlichkeiten können auch komplexere Aufgaben gelöst werden.

Auf einen Blick

Wahrscheinlichkeiten bestimmen, darstellen und auswerten

- M 1 Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- M 2 Mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Pfadregeln
- M 3 Anzahlen berechnen, Binomialkoeffizient
- M 4 Mengen, bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel
- M 5 Zufallsgröße und Erwartungswert, Gewinnmittel
- M 6 Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung, kumulierte Wahrscheinlichkeit
- M 7 Aufgaben
- M 8 Klassenarbeit

- Benötigt:
- GeoGebra
 - Excel
 - Taschenrechner

Verfahren: Ereignisse bestimmen

- Die Ereignisse als Text formulieren oder als Menge aufschreiben.

Beispiel: Zufallsexperiment ‚Werfen einer 2-€-Münze‘

Die möglichen Ergebnisse Bild (B) oder Zahl (Z) bilden die Ergebnismenge $S = \{B, Z\}$.

Elementarereignisse sind $\{B\}$ und $\{Z\}$.

Ein unmögliches Ereignis ist es, ein Wappen zu werfen.

Ein sicheres Ereignis ist $\{B, Z\}$.

Das Gegenereignis zu $\{B\}$ ist $\{Z\}$ und umgekehrt.



2-Euro-Münze, Vorder- und Rückseite
© Europäische Zentralbank

Laplace-Experimente und ihre Wahrscheinlichkeit, ideales Experimentiergerät

Ein Zufallsexperiment, bei denen alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißt Laplace Experiment. Bei Laplace Experimenten lassen sich die Wahrscheinlichkeiten einfach berechnen.

Hat ein Zufallsexperiment endlich viele Elementarereignisse und haben diese alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ereignisse bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ereignisse}}$$

$$\text{oder kurz: } P(A) = \frac{\text{Anzahl der Gewünschten}}{\text{Anzahl der Möglichen}}$$

Wenn die Formel von Laplace gilt, dann ist es z. B. eine **ideale Münze** oder ein **idealer Würfel**.

Wahrscheinlichkeiten, Formeln, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Wahrscheinlichkeit** P ordnet jedem Ereignis E der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments eine positive Zahl $P(E)$ zu.

Es gelten

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = P(\text{sicheren Ereignis}) = 1$
3. $P(\{\}) = P(\text{unmögliches Ereignis}) = 0$, ($\{\}$ Leere Menge)
4. $P(\text{Ereignis}) + P(\text{Gegenereignis}) = 1 = P(S) = P(\text{sicheren Ereignis})$

Gehören zu einem Ereignis A mehrere Ergebnisse, so ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse bzw. aller Ergebnisse ist 1.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ordnet jedem Ereignis eines Zufallsexperiments eine Wahrscheinlichkeit zu.

Verfahren: Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Die Ereignisse als Text formulieren oder als Menge aufschreiben.
- Wahrscheinlichkeiten dazu angeben bzw. berechnen.
- Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung aufstellen.

Beispiel: Ereignisarten und Wahrscheinlichkeiten ‚Werfen eines Sechser-Würfels‘

Es wird ein idealer Würfel betrachtet. Zum Ereignis werden eine Wortform und die Menge dazu angegeben. Die Wahrscheinlichkeit wird mit der Formel von Laplace berechnet. Für Ereignis E und Gegenereignis \bar{E} gilt $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ oder $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.



Grafik: Stephen Silver / Wikimedia Commons / CCO

M 3 Anzahlen berechnen, Binomialkoeffizient

Anzahlen berechnen, Teil der Kombinatorik

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten müssen Anzahlen berechnet werden:

- Anzahl der gewünschten Ergebnisse (Laplace Experiment),
- Anzahl aller möglichen Ergebnisse (Laplace Experiment),
- Anzahl der Pfade bzw. Tupel (Baumdiagramm).

Verfahren: Berechnung der Anzahl von Tupeln

- Die mögliche Anzahl für die erste Stelle wird notiert.
- Die Anzahl für die zweite Stelle wird notiert.
- usw.

Das Produkt der Anzahlen ergibt die Anzahl der Tupel.

Beispiel: Anzahlen für idealen Sechser-Würfel

Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen.

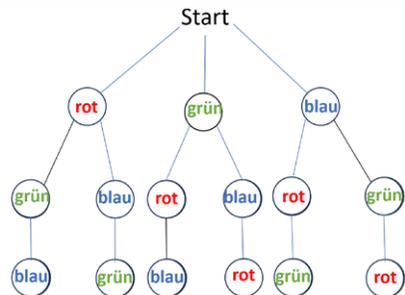
- Wie viele Zahlen können dabei auftreten?
Für jeden Wurf gibt es das Tupel ZZZ und für jede Zahl Z dazu 6 Möglichkeiten, also ist die Anzahl der Zahlen $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.
- Wie viele Ergebnisse mit verschiedenen Ziffern können dabei auftreten?
Für jeden Wurf gibt es das Tupel ZZZ . Für den ersten Wurf gibt es 6 Möglichkeiten, für den zweiten Wurf gibt es nur noch 5 Möglichkeiten und für den dritten Wurf gibt es nur noch 4 Möglichkeiten, also ist die Anzahl der Ergebnisse mit verschiedenen Ziffern $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Beispiel: Bücher anordnen

Drei Bücher mit den Farben Rot (r), Grün (g) und Blau (b) sollen in eine Reihe gelegt werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 3 Bücher in einer Reihe anzuordnen?

Es ist ein Experiment ohne Zurücklegen mit den Ergebnissen: rbg, rbg, grb, gbr, brg, bgr.



Grafik: Dr. Günter Scheu

M 5 Zufallsgröße und Erwartungswert, Gewinnspiel

Zufallsgröße und Erwartungswert

Eine **Zufallsgröße** X (Zufallsvariable) ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Eine Zufallsgröße wird meist durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Diese gibt an, welche Werte die Zufallsgröße annehmen kann und mit welchen Wahrscheinlichkeiten sie dies tut.

$P(X = k) = p$ bedeutet, dass die Zufallsgröße X für den Wert k die Wahrscheinlichkeit p annimmt oder dass die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeit p den Wert k annimmt.

Der **Erwartungswert** $E(X)$ der Zufallsgröße X ist der Wert, der bei der mehrfachen Durchführung eines Zufallsexperiments im Durchschnitt zu erwarten ist.

Verfahren: Zufallsgröße und Erwartungswert bestimmen

- Zufallsgröße festlegen.
- Die Werte der Zufallsgröße X bestimmen und die dazu gehörenden Wahrscheinlichkeiten berechnen und mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen.
- Zur Berechnung des Erwartungswerts werden die Werte der Zufallsgröße mit ihren Wahrscheinlichkeiten multipliziert.
- Die anschließende Addition der Ergebnisse ergibt den Erwartungswert $E(X)$.
- Für die n Werte x_i der Zufallsvariablen X gilt die Formel

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

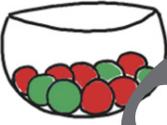
Aufgaben

M 7

M 1 Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aufgabe 1: Ereignisse

Gegeben sind die drei Standardmodelle für Zufallsexperimente.

Zehner-Würfel	Urne: 6 rote, 4 grüne Kugeln	Glücksrad: Blau: $\frac{1}{2}$, Orange: $\frac{1}{3}$, Grau: $\frac{1}{6}$
		

Grafiken von links nach rechts:

10-seitiger Würfel: yves_guillou / Wikimedia Commons (CC0)

Urne: Sabine Ziehmer

Kreisdiagramm: Dr. Günter Scheu

- Bestimme jeweils die Ergebnismenge bei einem Experiment.
- Wie lautet das Gegenereignis zu
 - Würfel: $\{2, 4, 6\}$
 - Urne: $\{\text{rot, rot, rot}\} = \{\text{r}\}$
 - Glücksrad: $\{\text{blau, blau}\} = \{\text{bb}\}$?
- Berechne:
 - Würfel: $P(\text{gerade Zahl}), P(\text{Primzahl})$
 - Urne: $P(\text{rot, rot}), P(\text{nicht rot, nicht rot})$
 - Glücksrad: $P(\text{blau, nicht blau}), P(\text{nicht grau, nicht grau})$.
- Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Aufgabe 2: Zweifache Vierer-Würfel

Ein weißer und schwarzer idealer Vierer-Würfel mit den Zahlen von 1 bis 4 wird geworfen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A bis D.

A: Der weiße Würfel zeigt eine größere Zahl als der schwarze Würfel.

B: Der weiße Würfel zeigt eine gerade Zahl.

C: Der weiße Würfel zeigt eine gerade Zahl und der schwarze Würfel eine Zahl größer 2.

D: Der schwarze Würfel zeigt eine 1 oder 2 und die Summe beider Würfel ist 4.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

