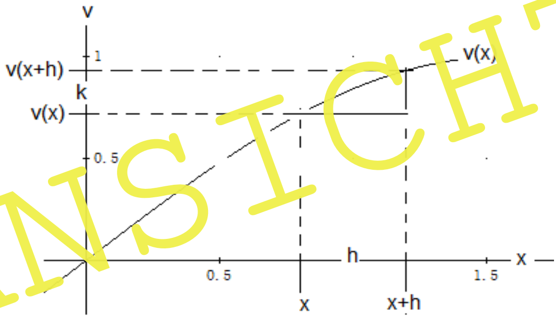
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Herleitung und Übungen zur Ableitung verketteter Funktionen

Die Kettenregel verstehen und anwenden

RAABE
KLASSE SCHULE

Herleitung und Übungen zur Ableitung verketteter Funktionen

Herleitung der Ableitung verketteter Funktionen

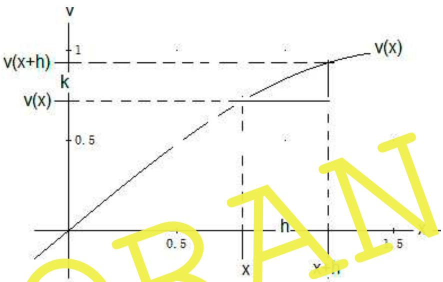
Den Funktionen u und v wird durch folgende Vorschrift eine Funktion f zugeordnet: $f(x) = u(v(x))$. Man nennt f eine **verkettete Funktion**.

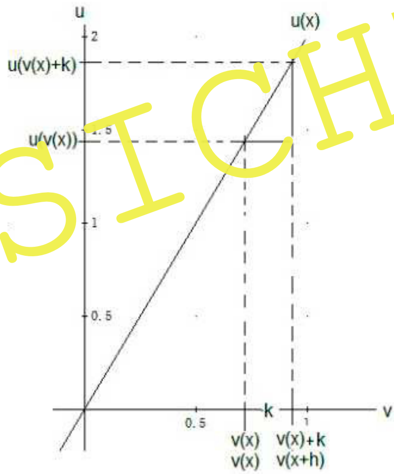
Es gibt auch die Schreibweise $f(x) = (u \circ v)(x)$.

Zum Beispiel: $u(x) = \sin(v(x))$ und $v(x) = 2x$. Dann ist $f(x) = \sin(2x)$.

In der graphischen Darstellung wird bereits die Festlegung

$k = v(x+h) - v(x)$ sichtbar.





Aus dieser Festlegung folgt:

(1) $v(x+h) = v(x) + k$

(2) $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{k} = 1$

Der Differenzenquotient von f lautet:

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}$ und wegen (1) $\dfrac{u(v(x)+k)-u(v(x))}{h}$

und dann wegen (2) $\dfrac{u(v(x)+k)-u(v(x))}{h} \cdot \dfrac{v(x+h)-v(x)}{k}$.

Das Vertauschen der Nenner ergibt: $\dfrac{u(v(x)+k)-u(v(x))}{k} \cdot \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$.

Der erste Faktor dieses Produktes ist der Differenzenquotient von u(v(x)) und der zweite Faktor ist der Differenzenquotient von v(x).
Es gilt $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ und der Grenzwert des Differenzenquotienten von f für $h \to 0$ ist das Produkt der Ableitungen von u, nämlich der sogenannten äußeren Ableitung $u'(v(x))$ multipliziert mit der Ableitung von v, nämlich der sogenannten inneren Ableitung $v'(x)$.

> Die Regel:
> $f(x) = u(v(x))$ hat die Ableitung $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
> heißt **Kettenregel**.

Zurück zum Beispiel:

$f(x) = \sin(2x)$ hat die äußere Funktion $u = \sin(v(x))$ mit der äußeren Ableitung $u'(v(x)) = \cos(v(x))$ und die innere Funktion $v(x) = 2x$ mit der inneren Ableitung $v'(x) = 2$. Dann hat f(x) die Ableitung $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

Übungen zur Anwendung der Kettenregel

Leiten Sie folgende Funktionen mithilfe der Kettenregel ab.

a) $f(x) = \sin(x^2) - 3x + 1$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = \cos(x^2 + 2x)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$

e) $f(x) = e^{x^2+2x+1}$

f) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Ableitungsregeln
- Kommunikation: Einzelarbeit, Frontalunterricht
- Problemlösen: Herleiten, Zurückführen auf Bekanntes
- Modellierung: –
- Medien: –
- Methode: Steuerung von Denkstrategien überwiegend durch die Lehrkraft, Gewinnung von Lernresultaten durch die Schüler, Sicherung von Lernerfolgen im Schüler-Schüler-Gespräch und im Schüler-Lehrer-Gespräch
- Inhalt in Stichworten: Herleitung der Kettenregel, Anwendung der Kettenregel

Autor: Roland Schröder

Lösung

a) $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2) - 3$

b) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

c) $f'(x) = -(2x+2) \cdot \sin(x^2 + 2x)$

d) $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2 - 3x + 1}$

e) $f'(x) = (2x+2) \cdot e^{x^2+2x+1}$

f) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot x = -\dfrac{1}{x}$