UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II

Von Hewschober, Senne, Boltz

Rotationskörper und Kreisberechnungen
in Johannes Keplers „Wein-Visier-Büchlein“ von 1616

RAABE
KLASSE SCHULE

Von Hewschober, Senne, Boltz: Rotationskörper und Kreisberechnungen in Johannes Keplers „Wein-Visier-Büchlein“ von 1616

Einführung

Johannes Kepler (geb. am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt) hatte nach dem Tod seiner ersten Frau im Oktober 1613 ein zweites Mal geheiratet. Die Hochzeitsfeier fand im österreichischen Linz statt. Zu den Hochzeitsvorbereitungen gehörte auch der Kauf von Wein.

Wikimedia Commons: gemeinfrei

Abb.1: Johannes Kepler

Für Kepler war dies der Anlass, sich Gedanken darüber zu machen, wie es sein kann, dass man am „Rheinstrom … in Teutschen Landen“ Weinmengen mit geeichten Fässern bestimmt, bei deren Eichung man so viel Wasser benötigt, dass die Tagesleistung eines Brunnens dazu unter Umständen nicht ausreicht, während in Österreich das einfache Hineinstecken von „Visierruthen“ in das Spundloch genügen soll. Das führte dazu, dass er sein „Oesterreichisches Wein-Visier-Büchlein“ schrieb, zunächst in lateinischer Sprache und danach um 1616 auf Deutsch.[1]

Schreiber, Heinrich (Grammateus): Ein new…künstlich Rechenbüchlin, Erffurdt 1523

Abb. 2: Gebrauch der kubischen Visierrute, die nach oben hin enger geteilt ist.

Das Buch, das knapp 120 Seiten umfasst, enthält mit Anhang 100 Abschnitte. Nach der Einleitung (Abschnitte 1 bis 5) betrachtet Kepler in den Abschnitten 6 bis 67 unter anderem rotationssymmetrische Körper. Dabei stellt er eine Art Formelsammlung zusammen.
Danach beschäftigt er sich mit Fässern und der „Visierruthenmethode“.

[1] Die Originalausgabe von 1616 ist beim Deutschen Textarchiv in editierbarer Textform abrufbar: http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/kepler_messekunst_1616?p=1

Christian Frisch (1807–1881) hat zwischen 1858 und 1871 eine erste Gesamtausgabe von Keplers Werk, „Kepleri Opera omnia“, in acht Bänden herausgegeben. Das gesamte „Visierbüchlein“ findet sich auf den Seiten 495 bis 613 des Bandes V[2]. Sämtliche Textauszüge dieses Beitrags sind dieser Ausgabe entnommen.

Keplers Ausdrucksweise ist anschaulich: „Mess außen herumb, kanstu nicht mitten hindurch …“ (Abschnitt 34: Vom Hewschober).
Manchmal klingt sie, für unsere Verhältnisse, derb, wie folgende Textstelle (aus dem Abschnitt 3: Fürnembster Zweck dieses Büchleins) zeigt:

> … damit also ein jeder nach seinem Verstand vnd Gelegenheiten das Lateinische oder das Teutsche Exemplar oder beyde zusamen erkauffen vnd gebrauchen könde: verhoffend, beydes Glehrte vnd Idioten werden mit meinem wolgemeinten Fleiss zufriden sein, vnd dessen geniessen beim Oesterreichischen külen Wein.

Dabei ist der „Idiot“ sicher nicht böse gemeint, sondern eher im Sinne von „Laie“ zu verstehen und hat im Laufe der Jahrhunderte eine Bedeutungswandlung erfahren.

Um einen Eindruck der Original-Ausgabe zu gewinnen, folgt die gleiche Textstelle im Originalsatz:

> damit also ein jeder / nach seinem verstand vnd glegenheiten / das Lateinische oder das Teutsche Exemplar / oder beyde zusamen erkauffen vnnd gebrauchen könde: Verhoffend / beydes glehrte vnd Idioten werden mit meinem wolgemeinten fleiß zufriden sein / vnnd dessen geniessen beym Oesterreichischen külen Wein.

Im Folgenden sollen nun einige Formeln und Zusammenhänge aus verschiedenen Textpassagen abgeleitet werden. Dies ist nicht immer ganz einfach, da Ergebnisse meist nicht mit unserer modernen Bezeichnungsweise und in Formeln, sondern durch Verhältnisse angegeben werden.

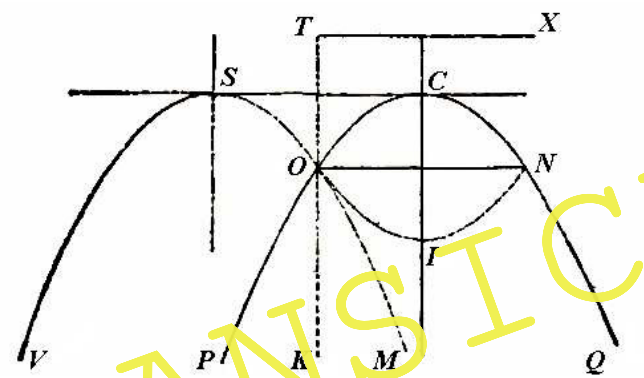
[2] Die Gesamtausgabe ist unter folgendem Link zu finden: http://scans.library.utoronto.ca/pdf/5/11/operaomniaedidit05kepluoft/operaomniaedidit05kepluoft.pdf

Aufgaben

A. Rotationskörper

Es folgt ein vollständiger Abschnitt aus dem „Visierbüchlein“:

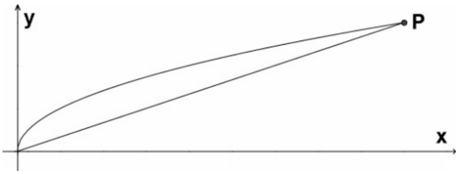
34. *Vom Hewschober.*



Conoides Parabolicum (in hie beygesetzter 13. Figur PCQ) wirt auch durch einen Kegel gemessen, der mit dem Conoide auff einem flachen runden Boden PQ stehet, gleicher Höch mit ihme, dann das Conoides oder Hewschober PCQ füllet oder raumet solcher Kegel anderthalbe. Multiplicir derohalben die Zahl der Feldung am Boden PQ dess Hewschobers PCQ in sein halbe Höch, so hastu den Raum von dem gantzen Corpus.

Wie wär aber das Feld am Boden zu finden? Mess aussen herumb, kanstu nicht mitten hindurch, dann auss dem Vmbkraiss wirdt dir bekant der diameter, wie bey No. 6. Hernach suche das Feld durch No. 14. (Comp. No. 89.)

1. Eine Gerade und eine (quer gelegte) Parabel gehen beide durch den Punkt P (h | r). Bei Rotation um die x-Achse entstehen ein Kegel und ein Rotationsparaboloid.



   a) Bestimmen Sie eine geeignete Funktion f für die Parabel (Scheitel im Ursprung).

   b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Rotationsparaboloids.

   c) Zeigen Sie: Die Rauminhalte von Rotationsparaboloid und Kegel verhalten sich wie 3:2.

   d) Zeigen Sie: Für den Rauminhalt des Paraboloids gilt:
   $V = G \cdot \frac{h}{2}$.

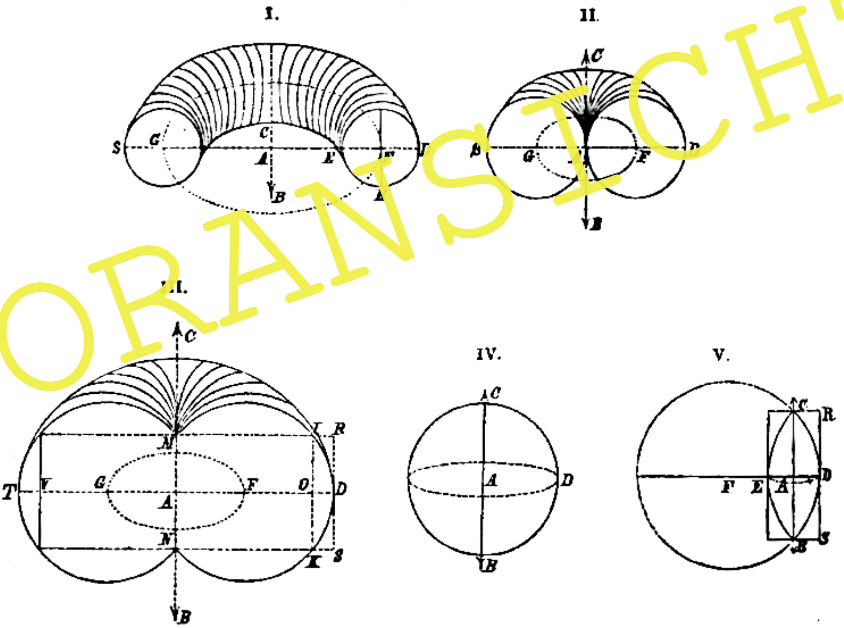
In Abschnitt 32 betrachtet Kepler die Rotationskörper, die sich aus den ebenen Kegelschnitten ergeben:

32. *Was für Figuren aus den flachen Kegelschnitten kommen, wann einer nach dem andern auff underschidliche Weise zur Lehr gebraucht und die Massa oder Zeug um Drästock nach solcher Lehr abgedräet wirdt.*

(Auss dem Supplemento. p. 575 s.)

Deren Kegelschnitte seind vier, ein Circkel, ein ablenger Circkel, ein Parabole, ein Hyperbole: auss disen vier Figuren kan jede auff fünfferley Art herumb getriben oder zur Lehr angeschlagen werden: besihe hie die 10. Figur.

Fig. 10.



Die Bezeichnungen für die vier Kegelschnitte sind, bis auf eine Ausnahme, leicht zu verstehen:

Worterklärungen:

Circkel	Kreis
ablenger Circkel	Ellipse
Parabole	Parabel
Hyperbole	Hyperbel
zur Lehr gebraucht	für Regeln benötigt

Die abgebildeten Fälle für einen Kreis sind recht übersichtlich.
Bei den anderen Kegelschnitten wird es komplizierter. Insgesamt kommt Kepler auf 92 Figuren (= Körper). Kepler gibt ihnen so schöne Namen wie:
Ey, Kisslingstein, Olive, Bergkülbel und andere (siehe folgende Textstelle):

Soviel wirt vns zu Betrachtung dess Fasses dienstlich sein. Sonsten kommen vnder die obbesagten 92 Sorten allerhand Küttenrunde, Birenrunde, Zirbelnussrunde, allerhand Kernrunde, dann Zapffenrunde, Brait-Kürbisrunde, Judenkerschenrunde vnd dergleichen Figuren, deren fast jede ihr aigene Weise hat, dardurch sie kunstlich mag gemessen werden, also dass es nicht noth sey, sie gegen andern Sorten gleichs Zeugs zu wegen, oder in ein Wasser zu werffen vnd die Erhöhung dess Wassers, durch sie beschehen, warzunemen, welches sonsten die zwey, aber nit kunstliche, Mittel vnd Handgriffe seind, allerhand vnordenliche vngestalte Figuren nach ihrem Leib, Raum oder Fülle zu messen.

Worterklärungen:

kunstlich messen	gekonnt berechnen (Kunst: von Können)
wegen	wägen / wiegen
unordentliche ungestalte Figuren	unregelmäßige Körper

Volumenbestimmungen durch Wiegen oder Eintauchen in Wasser lässt Kepler also nicht gelten, weil sie zu ungenau sind.

Kompetenzprofil

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation: begründen, bewerten, diskutieren, mathematische Texte erfassen
- Problemlösen: Probleme erkunden und zerlegen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: -
- Medien: -
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Rotationskörper, Kreisabschnitt, Kegel, Kugel, Torus, Guldin'sche Regel

Autor: Peter Bunzel

Lösung

1. a) $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$

$$P(h \mid r) \Rightarrow f(h) = r \Rightarrow a \cdot \sqrt{h} = r \Rightarrow a = \frac{r}{\sqrt{h}} \Rightarrow f(x) = \frac{r}{\sqrt{h}} \cdot \sqrt{x}$$

b) Volumen des Paraboloids:

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h} \cdot x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{r^2}{h} \cdot \frac{1}{2} x^2\right]_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

c) Volumen des Kegels:

$$V_2 = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Verhältnis der Rauminhalte:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{1} = 3:2$$

d) Volumen des Paraboloids :

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{h}{2} = G \cdot \frac{h}{2}$$

2. a) Querschnittsfläche: $A = \pi r^2$

Flächenschwerpunkt: $M(r \mid 0)$

Weg des Flächenschwerpunktes: $s = 2\pi r$

Ringvolumen: $V_1 = A \cdot s = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 \cdot r^3$

b) Kugelvolumen: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Verhältnis der Rauminhalte:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi^2 \cdot r^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{3\pi} = \frac{2 \cdot 3{,}5}{3\pi \cdot 3{,}5} = \frac{7}{10{,}5\pi}$$

Der Nenner ist $10{,}5\pi \approx 32{,}987 \approx 33$.

Bei der Näherung $10{,}5\pi \approx 33$ beträgt der Fehler nur ca. 0,04 %.

Kepler gibt zwar immer wieder Näherungen an, betont aber gleich zu Beginn des Buches (Abschnitt 6), dass das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises **etwa** 22 : 7 beträgt, dass sich dieses Verhältnis aber nicht durch ein Verhältnis von ganzen Zahlen angeben lässt:

Dabey zu wissen, dass es nicht nach der Scherffe zuverstehen, wann man sagt, der Vmbkreiss halte sich gegen dem diameter oder Breitte wie 22 gegen 7. Dann es ist nicht müglich einen einigen gleichen Theil von dem diameter zunemen, welcher den Vmbkreiss gerad ausmesse; ja wann man gleich den diameter theilete in zweintzig tausent tausent tausent tausent mal tausent gleicher Stücklein, so wirt doch etwas vberbleiben, das weniger ist, dann ein solches kleines Stücklein, dann der Vmbkreiss wirdt alsdann sein 62 831 853 071 795 861 solcher kleiner Theil vnd noch ein wenig drüber, doch nit so vil, das es gar 862 werden. *)

*) Behalt dise Zahl, dann du wirst irer oft bedürfen, sonderlich iren halben Theil 3141592653589793.