UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II

Influenza – Die Grippe hat Deutschland fest im Griff

Modellieren von Funktionen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-6[illegible]
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: [illegible] Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: georgeclerk / E+ / Getty Images Plus
Korrektorat: [illegible]tin Wollert

Influenza 2018 – Die Grippe hat Deutschland fest im Griff

Die Grippewelle der Saison 2017/18 hat nach Definition der Arbeitsgemeinschaft Influenza GI in der 52. Kalenderwoche 2017 begonnen. Während in der 1. Meldewoche (30.12.2017 bis 05.01.2018) nach Infektionsschutzgesetz (IfSG) 1.326 labordiagnostisch bestätigte Influenzafälle an das Robert Koch-Institut (RKI) übermittelt wurden, stieg diese Zahl Woche für Woche bis zur 10. Meldewoche (03.03. bis 09.03.2018) bis auf die maximale Zahl von 46 382 gemeldeten Fällen an. Im Jahr 2018 wurden bis zu dieser Woche dem RKI mehr als 300 000 Fälle gemeldet und die Zahl der Toten, die direkt auf die Grippe zurückzuführen waren, liegt bei knapp 1000. (Aus: Influenza-Wochenbericht des Robert-Koch-Instituts vom 17.-23.03. 2018, S. 1. https://influenza.rki.de/Wochenberichte.aspx, abgerufen am 3.4.2018)
Zu beachten ist, dass dies nur die Fälle sind, die dem RKI gemeldet wurden und die Zahl der an Influenza Erkrankten weit höher lag.
Die Grippewelle machte sich auch in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens bemerkbar. So stieg die Zahl der Krankmeldungen in der Wirtschaft auf den höchsten Stand seit 10 Jahren und auch in den Schulen fehlten teilweise bis zur Hälfte der Schüler in den Klassen bzw. der Lehrer im Lehrerzimmer.*

Die nachfolgende Tabelle zeigt die dem RKI gemeldeten Influenzafälle in der entsprechenden Kalenderwoche des Jahres 2018.

Meldewoche	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Anzahl der gemeldeten Fälle	1326	1569	4291	8948	15 188

6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
17 9[illegible]0	2[illegible] 279	[illegible]5 284	42 406	46 382	44 562	25 216

Quelle: Influenza-Wochenbericht des Robert-Koch-Instituts vom 03.-09.02. 2018, S. 6, Tab. 4 und Influenza-Wochenbericht des Robert-Koch-Instituts vom 17.-23.03. 2018, S. 6, Tab. 4 – https://influenza.rki.de/Wochenberichte/2017_2018/2018-06.pdf,
https://influenza.rki.de/Wochenberichte/2017_2018/2018-12.pdf

* vgl. z. B. http://www.spiegel.de/gesundheit/diagnose/grippe-hoehepunkt-der-grippewelle-ist-ueberschritten-a-1199424.html
https://www.augsburger-allgemeine.de/wissenschaft/Grippewelle-2018-300-000-Kranke-und-fast-1000-Tote-in-Deutschland-id42750551.html

1. Die Abbildungen zeigen die Datenpunkte der dem RKI gemeldeten Infektionsfälle sowie eine quadratische Trendfunktion f und eine kubische Trendfunktion g (Abb. 1)

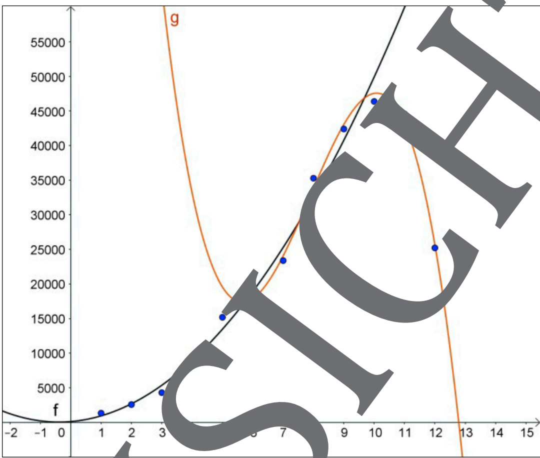


Abb. 1

bzw. eine exponentielle Trendfunktion k und die Trendfunktion einer ganzrationalen Funktion 4. Grades l (Abb. 2).

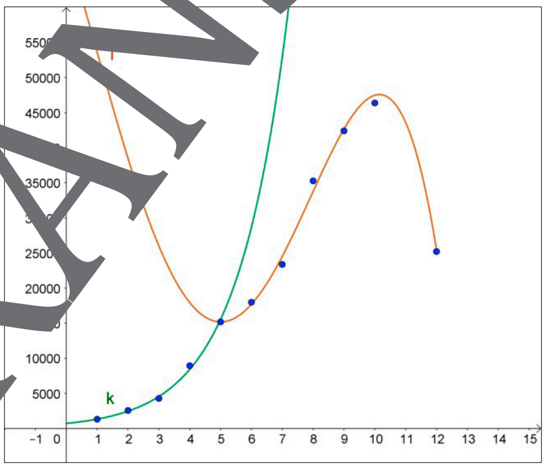


Abb. 2

Beschreiben Sie, inwieweit sich die in den Abbildungen dargestellten Funktionen zum Modellieren der Anzahl der Infektionsfälle im betrachteten Zeitraum eignen.

2. a) Bestimmen Sie mithilfe der Daten der 1., 4. und 6. Meldewoche die Gleichung einer quadratischen Funktion f_1, die zur Modellierung der Infektionsfälle von der 1. bis zur 6. Meldewoche benutzt werden soll.

   b) Bestimmen Sie mithilfe der Daten der 6., 9.,11. und 12. Meldewoche die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades f_2, die zur Modellierung der Infektionsfälle von der 7. bis zur 12. Meldewoche benutzt werden soll.

   c) Bestimmen Sie mithilfe der Daten der 1. und 5. Woche eine Funktion f_3, die zur Modellierung der Infektionsfälle von der 1. bis zur 5. Meldewoche benutzt werden soll.

   d) Bestimmen Sie mithilfe der Daten der 5., 7.,9., 11. und 12. Meldewoche die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades f_4, die zur Modellierung der Infektionsfälle von der 5. bis zur 12. Meldewoche benutzt werden soll.

   e) Vergleichen Sie die Funktionswerte der Funktionen f_1 (1. – 6. Meldewoche) und f_2 (7. – 12 Meldewoche) bzw. f_3 (1. – 5. Meldewoche) und f_4 (6. – 12. Meldewoche) mit den realen Daten. Vergleichen Sie die Modellierung der Daten mit Funktionen f_1 und f_2 bzw. mit den Funktionen f_3 und f_4 miteinander.

3. Die Funktionen f_1 und f_2 (f_3 und f_4) wurden so bestimmt, dass die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 (f_3 und f_4) an den Nahtstellen t = 6 (t = 5) den gleichen Funktionswert haben. Die Graphen sollen jetzt zusätzlich an den Nahtstellen „knickfrei“ sein. Begründen Sie anhand der Abbildungen 1 und 2, warum die Funktionen f_1 und f_2 „geeigneter“ erscheinen.

4. a) Bestimmen Sie zum Modellieren der Infektionsfälle der 6. bis 12. Meldewoche die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades g, deren Graph an der Nahtstelle t = 6 knickfrei in den Graph der Funktion f_1 übergeht und zum Zeitpunkt t = 10 einen Hochpunkt mit dem Maximum 4[illegible]382 hat.

   b) Beschreiben Sie die Abweichung der Funktionswerte der Funktionen f_2 und g von den realen Daten und vergleichen Sie dies mit den Abweichungen bei den Funktionen f_1 und f_2.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend
- Fachlicher Bezug: Biologie
- Kommunikation: Lösungen vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln und vergleichen
- Medien: GTR/CAS, Geogebra, Excel
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Bewerten von Graphen ganzrationaler Funktionen, Aufstellen von Funktionstermen ganzrationaler Funktionen /Exponentialfunktion, knickfrei, lineare Funktion als Tangente, Steigung, Integral

Autor: Günther Weber

Didaktisch – methodische Hinweise

Bei Aufgabe 2 sollten in Hinblick auf hilfsmittelfreie Aufgaben in Klausuren die quadratische und die Exponentialfunktion „von Hand“ bestimmt werden. Die ganzrationale Funktion 3. oder 4. Grades können dann mit einem GTR / CAS gelöst werden. Alternativ können die Schüler in 2 Gruppen aufgeteilt werden und jede Gruppe bestimmt dann eine Lösung.

Aufgabe 2 kann auch dahingehend abgeändert werden, dass verschiedene Schülergruppen den Funktionsterm mit anderen Datenpunkten bestimmen. Anschließend kann dann ermittelt werden, welcher Funktionsterm die Datenpunkte am besten annähert. Ebenso kann überprüft werden, ob die gefundene Funktion geeignet ist. So ergibt sich bei Aufgabe 2a die Funktion

$$f_1(t) = -\frac{\text{[illegible]}}{8} \cdot t^2 + \frac{4796}{4} \cdot t - 1147;\ 0 \le t \le 6\ ,$$

wenn die Datenpunkte nach 2, 4 und 6 Wochen genommen werden.

Die Funktionswerte gehen jedoch innerhalb der 1. Woche in den negativen Bereich, was bei gemeldeten Infektionsfällen nicht möglich ist.

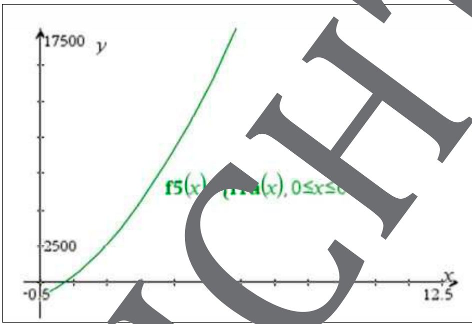
Mit CAS:

$f1a(t):=a\cdot t^2+b\cdot t+c$ Fertig

$\text{solve}\left(\begin{cases} f1a(2)=2569 \\ f1a(4)=8948 \\ f1a(6)=17990 \end{cases},\{a,b,c\}\right)$

$a=\frac{2663}{8}$ and $b=\frac{4769}{4}$ and $c=-1147$

$f1a(x):=\frac{2663}{8}\cdot t^2+\frac{4796}{4}\cdot t-1147$ Fertig



Lösung

1. In Abbildung 1 wird die Anzahl der gemeldeten Infektionsfälle in den ersten 9 Wochen recht gut durch die quadratische Funktion angenähert. In der 10. Woche übersteigen die Funktionswerte die gemeldeten Fälle schon deutlich. Ab der 10. Woche steigen die Funktionswerte weiter an, während die Anzahl der Fälle stark abnimmt.
   Die quadratische Funktion eignet sich für die Modellierung der Werte der 1. bis 9. Woche.
   Die Funktionswerte der kubischen Funktion nähern erst ab der 6. Woche den Werten der gemeldeten Fälle – dann aber recht gut – an.
   Die kubische Funktion eignet sich für die Modellierung der Werte der 6. bis 12. Woche.

   In Abbildung 2 wird die Anzahl der gemeldeten Infektionsfälle in den ersten 5 Wochen recht gut durch die Exponentialfunktion angenähert. Ab der 5. Woche übersteigen die Funktionswerte die Anzahl der gemeldeten Fälle bei weitem.
   Die Exponentialfunktion eignet sich für die Modellierung der Werte der 1. bis 5. Woche.
   Die Funktionswerte der ganzrationalen Funktion 4. Grades nähern sich erst ab der 5. Woche den Werten der gemeldeten Fälle – dann aber recht gut – an.
   Die ganzrationale Funktion 4. Grades eignet sich für die Modellierung der Werte der 5. bis 12. Woche.

2. a) Die allgemeine Form der quadratischen Funktion lautet:

$$f_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c,\ a \neq 0$$

Mit den vorhandenen Datenpunkten erhält man die Gleichungen

I	$f_1(1) = 1326$	$\Leftrightarrow$	$a + b + c = 1326$
II	$f_1(4) = 8948$	$\Leftrightarrow$	$16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 8948$
III	$f_1(6) = 17\,990$	$\Leftrightarrow$	$36 \cdot a + 6 \cdot b + c = 17\,990$

II – I: $15a + 3b = 7622$ (I')

III – I: $35a + 5b = 16\,664$ (II')

II'/5 - I'/3: $2a = \frac{11\,882}{15} \Leftrightarrow a = \frac{5941}{15}$

Einsetzen von a in I' ergibt die Gleichung:

$5941 + 3\,b = 7622 \ \Leftrightarrow b = \frac{1681}{3}$

Einsetzen von a und b in I führt zur Gleichung:

$$\frac{5941}{15} + \frac{1681}{3} + c = 1326 \Leftrightarrow c = \frac{1848}{5}$$

Die gesuchte quadratische Funktion lautet:

$$f_1(t) = \frac{5941}{15} t^2 + \frac{1681}{3} t + \frac{1848}{5};\ 0 \leq t \leq 6$$

Mit CAS:

$f1(t):=a \cdot t^2+b \cdot t+c$ Fertig

$\text{solve}\left(\begin{cases} f1(1)=1326 \\ f1(4)=8948 \\ f1(6)=17990 \end{cases}, \{a,b,c\}\right)$

$a=\frac{5941}{15}$ and $b=\frac{1681}{3}$ and $c=\frac{1848}{5}$

$f1(t):=\frac{5941}{15} \cdot t^2+\frac{1681}{3} \cdot t+\frac{1848}{5}$ Fertig

b) Die allgemeine Form der kubischen Funktion lautet:

$$f_2(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d,\ a \neq 0$$

Mit den vorhandenen Datenpunkten erhält man die Gleichungen

I $f_2(6) = 17\,990 \quad \Leftrightarrow \quad 216 \cdot a + 36 \cdot b + 6 \cdot c + d = 17\,990$

II $f_2(8) = 35\,284 \quad \Leftrightarrow \quad 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 35\,284$

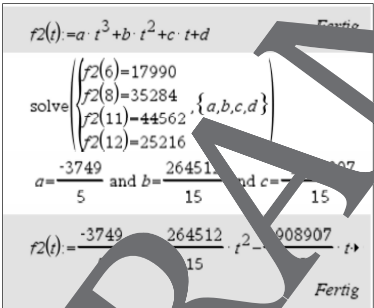
III $f_2(11) = 44\,562 \quad \Leftrightarrow \quad 1331 \cdot a + 121 \cdot b + 11 \cdot c + d = 44\,562$

IV $f_2(12) = 25\,216 \quad \Leftrightarrow \quad 1728 \cdot a + 144 \cdot b + 12 \cdot c + d = 25\,216$

Das Lösen des Gleichungssystems mit einem Taschenrechner führt zur Funktion:

$$f_2(t) = -\frac{3749}{5} \cdot t^3 + \frac{264\,512}{15} \cdot t^2 - \frac{1\,908\,907}{15} \cdot t + \frac{1\,543\,404}{6};\ 6 \leq t \leq 12$$

Mit CAS:



c) Die allgemeine Form der kubischen Funktion lautet:

$$f_3(t) = a \cdot e^{k \cdot t},\ a \neq 0$$

Mit den vorhandenen Datenpunkten erhält man die Gleichungen

I $f_3(1) = 1326 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^k = 1326 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1326}{e^k}$

II $f_3(5) = 15\,188 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{5 \cdot k} = 15\,188$

Einsetzen von a in Gleichung II führt zur Gleichung:

$$\frac{1326}{e^{k}} \cdot e^{5\cdot k} = 15\,188$$

$$e^{4\cdot k} = \frac{15\,188}{1326}$$

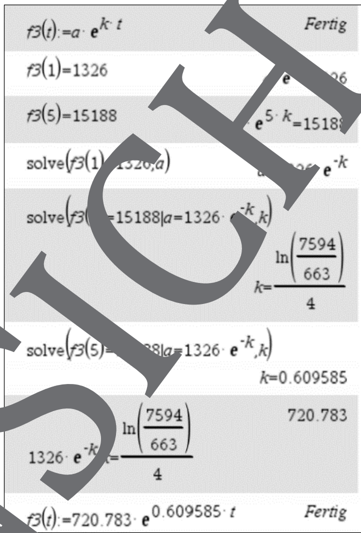
$$4k = \ln\left(\frac{15\,188}{1326}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{15\,188}{1326}\right)}{4} \approx 0{,}609585$$

Nach Einsetzen von k in Gleichung I erhält man den Wert für a.

$$a = \frac{1326}{e^{\frac{\ln\left(\frac{15\,188}{1326}\right)}{4}}} \approx 720{,}783$$

Mit CAS:



Die Exponentialfunktion lautet: $f_3(t) = 720{,}783 \cdot e^{0{,}609585\cdot t}, 0 \le t \le 6$

d) Die allgemeine Form der quartischen Funktion lautet:

$$f_4(t) = a\cdot t^4 + b\cdot t^3 + c\cdot t^2 + d\cdot t + e,\ a \neq 0$$

Mit den vorhandenen Datenpunkten erhält man die Gleichungen

I $f_4(5) = 15\,188 \Leftrightarrow 625\cdot a + 125\cdot b + 25\cdot c + 5\cdot d + e = 15\,188$

II $f_4(7) = 23\,379 \Leftrightarrow 2401\cdot a + 343\cdot b + 49\cdot c + 7\cdot d + e = 23\,379$

III $f_4(9) = 42\,406 \Leftrightarrow 6561\cdot a + 729\cdot b + 81\cdot c + 9\cdot d + e = 42\,406$

IV $f_4(11) = 44\,562 \Leftrightarrow 14\,641\cdot a + 1331\cdot b + 121\cdot c + 11\cdot d + e = 44\,562$

V $f_4(12) = 25\,216 \Leftrightarrow 20\,736\cdot a + 1728\cdot b + 144\cdot c + 12\cdot d + e = 25\,216$

Das Lösen des Gleichungssystems mit einem Taschenrechner führt zur Funktion:

$$f_4(t) = -\frac{87\,023}{1680}\cdot t^4 + \frac{604\,997}{560}\cdot t^3 - \frac{9\,906\,397}{1680}\cdot t^2 + \frac{1\,733\,203}{\ldots 0}\cdot t \ldots 77\,841;$$

$$6 \le t \le 12$$

Mit CAS:

$$f2(t):=a\cdot t^3+b\cdot t^2+c\cdot t+d \qquad \textit{Fertig}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f2(6)=17990 \\ f2(8)=35284 \\ f2(11)=44562 \\ f2(12)=25216 \end{cases},\{a,b,c,d\}\right)$$

$$a=\frac{-3749}{5} \text{ and } b=\frac{264512}{15} \text{ and } c=\frac{-1908907}{15} \blacktriangleright$$

$$f2(t):=\frac{-3749}{5}\cdot t^3+\frac{264512}{15}\cdot t^2-\frac{1908907}{15}\cdot t \blacktriangleright \qquad \textit{Fertig}$$

e) Mit Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	Meldung von Influenza - Fällen an das RKI					
2						
3	Meldewoche	A[illegible] gemeld[illegible]en Fälle	Funktionswerte der [illegible]tionen f1 und f2	Abweichung	Funktionswerte der Funktionen f3 und f4	Abweichung
4	1	132[illegible]	[illegible]	0	1326	0
5	2	1569	[illegible]75	1506	2439	870
6	3	4291	5615	1324	4488	197
7	4	8948	8948	0	8256	692
8	5	15188	13073	2115	15188	0
9	[illegible]	17990	17990	0	16974	1016
10	[illegible]	[illegible]	24749	1370	23379	0
11	8	35284	32182	3102	32803	2481
12	9	42406	42406	0	42406	0
13	10	46382	48412	2030	48102	1720
14	[illegible]	[illegible]62	44562	0	44562	0
15	1[illegible]	[illegible]5216	25216	0	25216	0
16						
17				954		581

Im Bereich A4:A15 wird die Meldewoche, im Bereich B4:B15 die Anzahl der gemeldeten Fälle eingetragen.