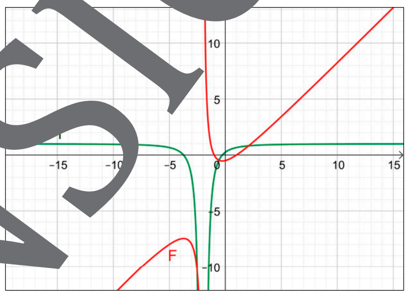
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Die Stammfunktion und das unbestimmte Integral

Definition, Beispiele und Aufgaben

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin O...
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustration: ...le Vöst
Bildnachweis Titel: S...rin Orth
Korrektorat: Daniel Fäs...r

Die Stammfunktion und das unbestimmte Integral

Die Stammfunktion

Beispiel 1

Wir suchen eine Funktion F, die als Ableitungsfunktion F' die Funktion $f:\ x \mapsto x^2 - 5x - 2$ hat.

Es soll also gelten: $F'(x) = f(x)$

Lösung (durch Probieren): $F:\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 2x$

<u>Bemerkung:</u> Die gefundene Funktion F ist keineswegs die einzige Funktion, denn es gibt beliebig viele weitere mit dieser Eigenschaft:

$F_1:\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$

$F_{-6,5}:\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6,5$

$F_{\sqrt{11}}:\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \sqrt{11}$

....

$F_c:\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Definition

Jede differenzierbare Funktion F heißt **Stammfunktion** zu einer Funktion f in einer gemeinsamen Definitionsmenge D, wenn $F' = f$ in D gilt.

Beispiel 2

$F(x) = \sqrt{x} \quad \left(D_F = \mathbb{R}_0^+\right)$ ist zu $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(D_f = \mathbb{R}^+\right)$ Stammfunktion in $D = \mathbb{R}^+$

Beispiel 3

Stammfunktion F zu $f:\ x \mapsto x^3$? $\qquad F(x) = \frac{x^4}{4}$

Beispiel 4

Stammfunktion F zu f : $x \mapsto x^3$? $F(x) = \frac{x^4}{4}$

Regel

Eine Stammfunktion F zu $f: x \mapsto x^n$ ist: $F: x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\}\right)$

Bemerkungen zur Regel:

a) Wir sind also momentan nicht in der Lage zu $f: x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ eine Stammfunktion anzugeben.

b) Diese Regel gilt sogar für alle $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

z. B.: Stammfunktion F zu $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$? $F(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$

Wichtige Stammfunktionen

a) Eine Stammfunktion zu $f(x) = x^n$ ist in $D_f = D_F = \mathbb{R}$: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

denn: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$

b) Eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist in $D_f = D_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $F(x) = -\frac{1}{x}$,

denn es gilt: $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

c) Eine Stammfunktion zu $f(x) = \sin x$ ist in $D_f = D_F = \mathbb{R}$: $F(x) = -\cos x$,

denn es gilt: $(-\cos x)' = \sin x$

Das unbestimmte Integral

Definition

> Jede differenzierbare Funktion F heißt **Stammfunktion** zu einer Funktion f in einer gemeinsamen Definitionsmenge D, wenn $F' = f$ in D gilt.

Definition

> Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral** von f.
>
> Schreibweise: $\int f(x)\,dx = \{F \mid F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$

Zum Beispiel gilt:

> $$\int x^n dx = \left\{ F \,\middle|\, F:\ x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ C \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}$$

Zwei Rechenregeln für unbestimmte Integrale

> (1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
>
> (2) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

Begründungen:

Zu (1): Eine Stammfunktion zu $f(x) + g(x)$ ist:

$$F(x) + G(x) + C = \underbrace{F(x) + C_1}_{\int f(x)dx} + \underbrace{G(x) + C_2}_{\int g(x)dx}$$

Zu (2): Eine Stammfunktion zu $k \cdot f(x)$ ist $k \cdot F(x) + C = k \cdot \left(\underbrace{F(x) + C^*}_{\int f(x)dx} \right)$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie jeweils <u>eine</u> Stammfunktion zu der angegebenen Funktion.

   a) $a:\ x \mapsto -4x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

   b) $b:\ x \mapsto -2\sqrt{x};\ D_b = \mathbb{R}_0^+$

   Was muss für die Definitionsmenge der Stammfunktion B gelten? Warum?

   c) $c:\ x \mapsto \frac{2}{x^2} - 3x^3 + 1;\ D_c = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Zusatzfrage: Geben Sie eine bzw. alle Stammfunktionen an, welche durch den Punkt $P(1 \mid -2)$ verlaufen.

   d) $d:\ x \mapsto e^{\frac{1}{3}x}$

   e) $e:\ x \mapsto e^{2-3x}$

   f) $f:\ x \mapsto \frac{2}{e^x}$

   g) $g:\ x \mapsto (3x-1)e^{3x^2-2x}$

   h) $h:\ x \mapsto \frac{\sqrt{e^x} - \text{[illegible]}e^{3x}}{e\,\text{[illegible]}\,e^{\frac{\text{[illegible]}}{2}x}}$

   i) $i:\ x \mapsto \frac{2}{x^{\text{[illegible]}}};\ D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   j) $j:\ x \mapsto \frac{x^2}{2\text{[illegible]} + 1}$

   k) $k:\ x \mapsto \frac{1-3x}{3x^2 - 2x}$

l) $l:\ x \mapsto \dfrac{3x+1}{3x^2+2x+1};\quad D_l = ?$

m) $m:\ x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}-\cos(2x)\right)\cdot e^{\sin(2x)-x}$

n) $n:\ x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2. Geben Sie jeweils alle möglichen Stammfunktionen an.

a) $f:\ x \mapsto \dfrac{1}{9}x^4 - \dfrac{8}{9}x^3 + 2x^2$

b) $f:\ x \mapsto 1-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^5};\ D_f = \mathbb{R}_0^+$

c) $f:\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2};\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; Beachten S[illegible] dass D_f kein Intervall ist.

d) $f:\ x \mapsto \sin(2x)$

e) $f:\ x \mapsto 3\cdot\cos(5x$ [illegible] $2)$

f) $f:\ x \mapsto \dfrac{x^2+3}{[illegible]};\ D_f =$ [illegible]

3. Bestimmen S[illegible] die[illegible]enige [illegible]mmfunktion von f, deren Graph durch P verläuft.

a) $f:\ x \mapsto$ [illegible] $-2x-$ [illegible]; $P(3\,|\,-2)$

b) [illegible] $\mapsto -\dfrac{15}{[illegible]}x^4 + \dfrac{9}{8}x^2;\quad P(-2\,|\,1)$

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: berechnen, Ergebnisse reflektieren, argumentieren
- Problemlösen: Theoriekenntnisse auf konkrete Probleme anwenden
- Modellierung: −
- Medien: Taschenrechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Definition der Begriffe Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. a) $A:\ x \mapsto -x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x$

   b) $B:\ x \mapsto -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}x\sqrt{x}$

   Da B an der Randstelle x=0 nicht differenzierbar ist, ist die Stammfunktion von b: $B:\ x \mapsto -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}x\sqrt{x};\ D_B = \mathbb{R}^+$

   c) $C:\ x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{3}{4}x^4 + x$; Menge aller Stammfunktionen:

   $\left\{ C \middle| C(x) = -\frac{2}{x} - \frac{3}{4}x^4 + x + k;\ k \in \mathbb{R} \right\}$

   Bedingung: $P(1|-2) \in C:\ -2 = -2 - \frac{3}{4} + 1 + k \ \Leftrightarrow\ k = -\frac{1}{4}$

   Die Stammfunktion $C_{-\frac{1}{4}}:\ x \mapsto -\frac{2}{x} - \frac{3}{4}x^4 + x - \frac{1}{4}$ verläuft durch den Punkt $P(1|-2)$.

d) $d: x \mapsto e^{\frac{1}{3}x}$; $D: x \mapsto 3e^{\frac{1}{3}x}$

e) $e: x \mapsto e^{2-3x}$; $E: x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2-3x}$

f) $f: x \mapsto \frac{2}{e^x}$; $F: x \mapsto -\frac{2}{e^x}$

g) $g: x \mapsto (3x-1)e^{3x^2-2x}$; $G: x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x^2-2x}$

h) $h: x \mapsto \frac{\sqrt{e^x}-6e^{3x}}{e^{3x}-e^{\frac{1}{2}x}}$; $H: x \mapsto -2\ln\left|e^{3x}-e^{\frac{1}{2}x}\right|$

i) $i: x \mapsto -\frac{2}{x}$; $D_i = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $I: x \mapsto -2\cdot\ln|x|$; $D_I = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

j) $j: x \mapsto \frac{x^2}{2x^3+1}$; $J: x \mapsto \frac{1}{6}\ln\left|2x^3+1\right|$

k) $k: x \mapsto \frac{1-3x}{3x^2-2x}$; $K: x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-2x\right|$

l) $l: x \mapsto \frac{3x+1}{3x^2+2x+1}$; $D_l = \mathbb{R}$, da $3x^2+2x+1>0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{3x+1}{3x^2+2x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x+2}{3x^2+2x+1} \; ; \quad L(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(3x^2+2x+1\right)$$

m) $m: x \mapsto \left(\frac{1}{2}-\cos(2x)\right)\cdot e^{\sin(2x)-x}$; $M: x \mapsto -\frac{1}{2}e^{\sin(2x)-x}$

n) $n: x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $N: x \mapsto -\ln|\cos x|$