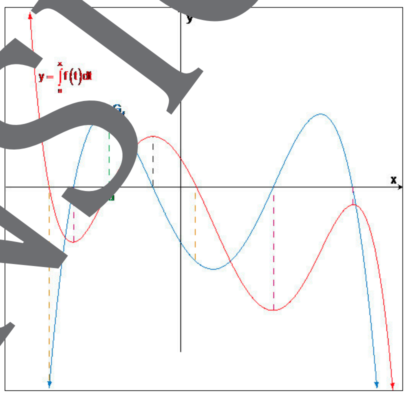
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Die Integralfunktion

Entwicklung des Zusammenhangs zwischen Funktion und zugehöriger Integralfunktion

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900 [illegible]
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst
Bildnachweis Titel: Carlo Vöst
Korrektorat: Daniel Fässler

Die Integralfunktion

Der Wert von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ hängt, außer von f, von der Wahl der Integrationsgrenzen a, b ab. Wenn man die obere Integrationsgrenze „offen“ (variabel) halten will, ersetzt man den festen Wert b durch die Variable x und bekommt so eine Funktion, welche für den jeweiligen x-Wert angibt, welcher Flächenbilanzwert von a bis zum Variablenwert x zwischen dem Graphen von f und der x-Achse „aufgelaufen“ ist.

Problem: „x“ würde im Term $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommen (als variable obere Grenze und als Integrationsvariable).

Deshalb schreibt man $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Der Wert eines Integrals ist nämlich von der Bezeichnung der Integrationsvariablen völlig unabhängig!

Begründung: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta t = \Delta z = \dots}$

Also: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz = \dots$

$I(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ ist also eine Funktion der oberen Integrationsgrenze!

Definition:

Eine Funktion f sei in einem Intervall I stetig. Jede im Intervall I definierte Funktion der Form $I(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ heißt eine **Integralfunktion** von f in I.

Beispiel 1

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ und die Integralfunktion

$$I(x)=\int_{-3}^{x}\left(\frac{1}{2}t+1\right)dt\,.$$

Es gilt offensichtlich: $\int_{-3}^{-2} f(x) = -\frac{1}{4}$, also ist: $I(-2)=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{1}{2}t+1\right)dt=-\frac{1}{4}$

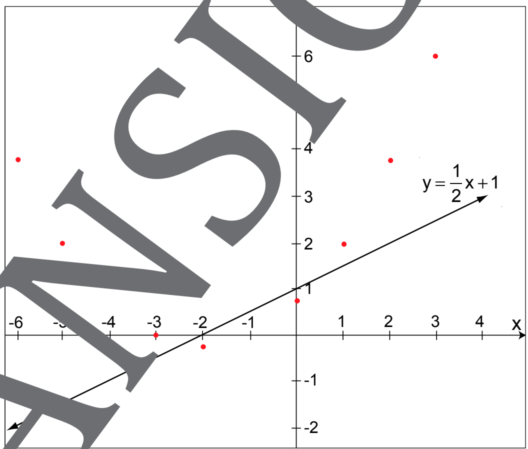
$$\int_{-3}^{0} f(x) = 0,75 \Rightarrow I(0) = 0,75$$

$$\int_{-3}^{1} f(x) = 2 \Rightarrow I(1) = 2$$

$$\int_{-3}^{2} f(x) = 3,75 \Rightarrow I(2) = 3,75$$

$$\int_{-3}^{3} f(x) = 6 \Rightarrow I(3) = 6$$

$$\int_{-3}^{-3} f(x) = 0 \Rightarrow I(-3) = 0$$



Verallgemeinerung:

$I(a)=\int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$, also hat jede Integralfunktion eine Nullstelle an der unteren Integrationsgrenze!

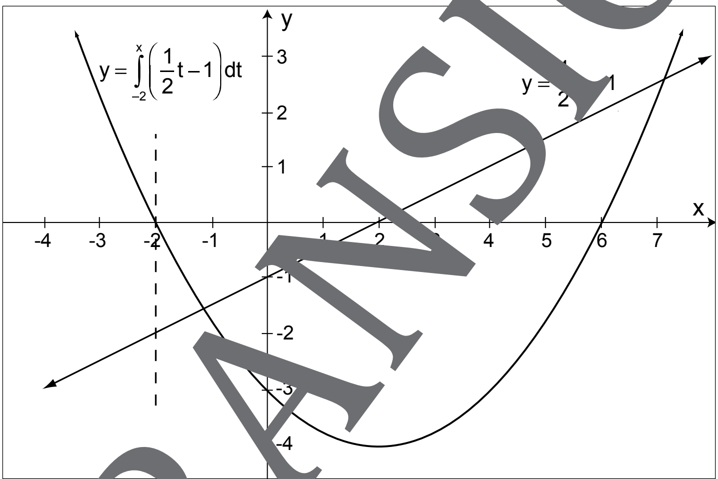
$$\int_{-3}^{-5} f(x) = 0 \Rightarrow I(-5) = 2$$

$$\int_{-3}^{-6} f(x) = 3,75 \Rightarrow I(-6) = 3,75$$

Beispiel 3

$f(x)=\frac{1}{2}x-1$; $\quad I(x)=\int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{2}t-1\right)dt$: beschreibt für variable x-Werte die Flächenbilanz zwischen der Geraden $y=\frac{1}{2}x-1$ und der x-Achse ausgehend von $x=-2$. Diese Flächenbilanz lässt sich auch so berechnen:

$-4+\frac{1}{2}(x-2)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=\frac{1}{4}x^2-x-3$; also gilt:



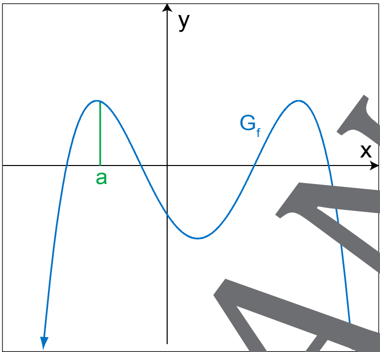
$$I(x)=\int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{2}t-1\right)dt=\underbrace{\frac{1}{4}x^2-x-3}_{\text{"integralfreie Darstellung der Integralfunktion"}}$$

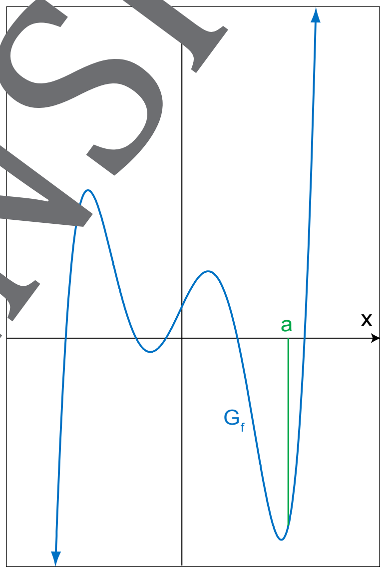
Es fällt auf, dass $I(x)=\frac{1}{4}x^2-x-3$ eine Stammfunktion der Integrandenfunktion ist. Im nächsten Beitrag werden wir sehen, dass dies immer so ist.

Aufgaben

1. Gegeben sind die abgebildeten Graphen G_f ganzrationaler Funktionen f. Skizzieren Sie jeweils in das abgebildete Koordinatensystem den Graphen G_I der dazugehörigen Integralfunktion $I:\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

   Sämtliche charakteristischen Zusammenhänge zwischen Integrandenfunktion f und dazugehöriger Integralfunktion I müssen dabei zweifelsfrei erkennbar sein. Insbesondere müssen von dem Graphen der Integralfunktion erkennbar sein: die Lage der **Nullstellen**, die Lage der **Extremstellen** (qualitativ), die Lage der **Stellen mit maximaler Steigung** (qualitativ).





2. Abgebildet ist der Graph einer im Intervall [-4,5;5] definierten Funktion f; er besteht aus einem Viertelkreis mit dem Mittelpunkt $M(-4,5\,|\,-1)$ und den drei Strecken [AB], [BC], [CD], wobei $A(-2,5\,|\,-1)$; $B(-1\,|\,2)$; $C([illegible])$; $D(5\,|\,-2)$ ist.

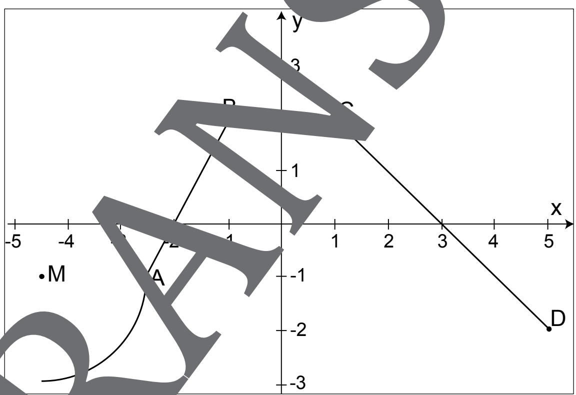
   Betrachtet wird nun die Integralfunktion $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

   a) Ermitteln Sie $I(-2,5)$, $I(-4,5)$, $I(-1)$, $I(2)$, $I(5)$.

   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der eingeschlossen wird von:

      (1) $x = -2,5$, $y = 0$, G_f, $x = 0,5$

      (2) $x = -1,5$, $x = 4$, G_f, $y = 0$



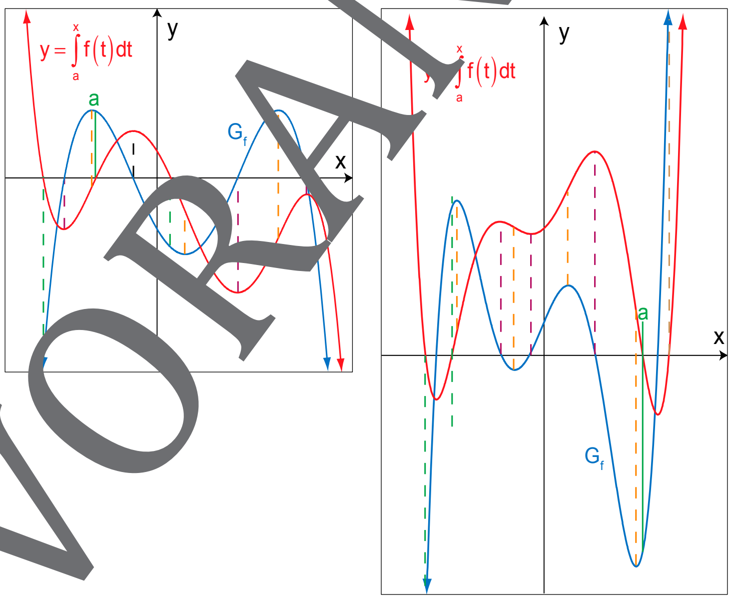
Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: argumentieren, berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Probleme erkunden und Lösungsstrategie entwickeln, Theorieerkenntnisse auf konkrete Probleme anwenden
- Modellierung: graphische Vorstellung des Zusammenhangs zwischen Funktion und Integralfunktion
- Medien: Taschenrechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Definition des Begriffs Integralfunktion, Entwicklung des Zusammenhangs zwischen Funktion und zugehöriger Integralfunktion

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1.



2. a) $I(-2,5) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = -\frac{3}{4}$

$I(-4,5) = \frac{1}{4}2^2\pi + 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \pi + \frac{5}{4}$

$I(-1) = 0$; $I(2) = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + \frac{1}{2} = 5,5$

$I(5) = 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 4$

e) (1) $A_\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + 1,5\cdot 2 = \frac{17}{4}$

Wenn man A_α durch Terme von I ausdrücken möchte, ergibt sich:

$A_\alpha = |I(-2)| + |I(-2)| - |I(-2,5)| + I([illegible],5)$

(2) $A_\beta = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1 + \frac{1}{[illegible]}\cdot 1\cdot [illegible] \frac{1}{[illegible]}\cdot 1\cdot 1 = \frac{29}{4}$

$A_\beta = |I(-1,5)| + I(3) + I([illegible]) - I(4)$

3. a) $I(x) = \int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{2}t - 2\right)dt$

$= \frac{1}{[illegible]} [illegible] \left([illegible]\frac{5}{[illegible]}\right) + \frac{1}{2}(x [illegible] 4)\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$

$= \frac{[illegible]}{4}x [illegible] 2x - \frac{[illegible]}{4}$;

$\frac{[illegible]}{dx}\left(\frac{[illegible]}{4}x [illegible] 2x - \frac{[illegible]}{4}\right) = \frac{1}{2}x - 2$; q.e.d.