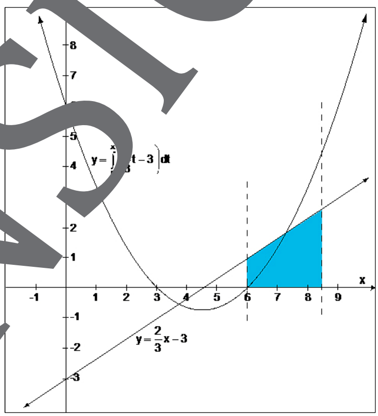
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Beweis und Folgerungen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

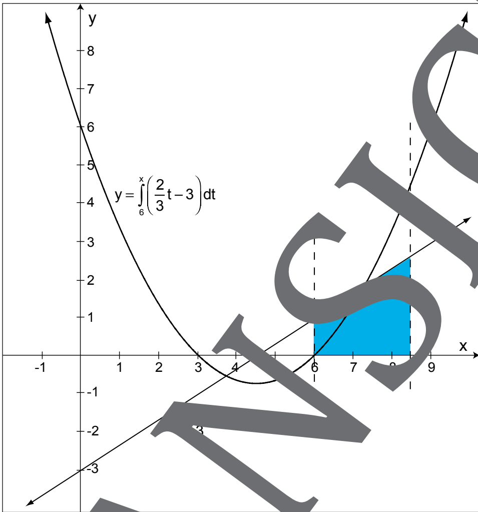
RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst
Bildnachweis Titel: Carlo Vöst
Korrektorat: Daniel Fässler

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$I(x)=\int_6^x\left(\frac{2}{3}t-3\right)dt$; Wie verläuft der Graph von I?



Integralfreie Darstellung von $I(x)=\int_6^x\left(\frac{2}{3}t-3\right)dt$ aufgrund der geometrisch-anschaulichen Bedeutung:

$$\int_6^x\left(\frac{2}{3}t-3\right)dt=\frac{1}{2}(x-4,5)\cdot\left(\frac{2}{3}x-3\right)-\frac{1}{2}(6-4,5)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 6-3\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x+\frac{27}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{3}x^2-3x+6$$

$\left(\frac{1}{3}x^2-3x+6\right)'=\frac{2}{3}x-3$; d.h.:

Die *Integralfunktion* ist eine *Stammfunktion* der *Integrandenfunktion*, oder mit anderen Worten: die Ableitung der Integralfunktion ist die Integrandenfunktion

Die Frage ist, ob dies <u>allgemein</u> so gilt.

Es wäre also zu zeigen: $I'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

Beweis des HDI

$$I'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h} \overset{?!}{=} f(x_0)\,;$$

Betrachten Sie den Differenzenquotienten: $\dfrac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h}$

Beweisziel:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} L & \le & \dfrac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h} & \le & R \\ \downarrow & h\to 0 & & h\to 0 & \downarrow \\ f(x_0) & & & & f(x_0) \\ & \Rightarrow & f(x_0) = I'(x_0) & & \end{array}}$$

$$\frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}$$

Abschätzung: $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \ge \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \Delta x \ge \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{abs.Min.})\Delta x = n\cdot f(x_{abs.Min.})\,\Delta x$

$$= f(x_{abs.Min.})\cdot n\cdot\frac{x_0+h-x_0}{n} = f(x_{abs.Min.})\cdot h$$

Analog: $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \le f(x_{abs.Max.})\cdot h$

Zusammenfassung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integralfunktion einer stetigen Funktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die Integrandenfunktion, kurz:

$$I(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad I'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

Sprechweise: Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Anwendungen des HDI

Beispiel 1

Es soll das bestimmte Integral $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ berechnet werden.

Lösung Betrachte die Integralfunktion $I(x)=\int_0^x \sin t\,dt$:

HDI $\Rightarrow$ $I'(x)=\sin x$

D. h., wenn man I(x) in integralfreier Schreibweise sucht, sucht man eine bestimmte Stammfunktion zu sin.

Zunächst ist: $I(x)=-\cos x+C;$

Bestimmung von C:

$$0=I(0)=\int_0^0 \sin t\,dt=-\cos 0+C \;\Rightarrow\; C=1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \sin t\,dt=-\cos x+1 \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos\pi+1=2$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+3x-1\right)dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(3x^3-\frac{5}{9}x^2-\text{[illegible]}\frac{1}{\text{[illegible]}}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{3}\left[(2+x)(2-x)\right]dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{-2}(3x-\text{[illegible]})^2\,dx$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{5}x^4-\frac{4}{3}x+\frac{3}{x^2}\right)dx$

f) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left(-\frac{4}{x}+\frac{2}{\text{[illegible]}}\right)dx$

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)\,dx$

h) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\left[4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]dx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{x-1}{3x^2-6x+4}dx$

j) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left[(2-3x)e^{-3x^2+4x}\right]dx$

k) (1) Zeigen Sie, dass $F(x)=x\cdot\ln(x)-x$ eine Stammfunktion zu

$f(x)=\ln(x)$ ist.

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2e}\ln(x)\,dx=?$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{2e}\left(\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{2e}\ln(2x)\,dx=?$

2. Gegeben ist die Funktion $F:\ x \mapsto \int\limits_1^x \frac{t^3}{3}\,dt$.

   a) Ermitteln Sie auf möglichst einfache Art und Weise diejenige Stelle, an der G_F die Steigung „9“ hat.

   b) Berechnen Sie den Winkel, den die Tangente an G_F in $P\left(\sqrt{3} \mid y_P\right)$ mit der x-Achse einschließt.

   c) Hat G_F Wendestellen? Begründen Sie.

3. Gegeben ist die Integralfunktion $F:\ x \mapsto \int\limits_3^x \left(3t^2 + 26t\right)dt$. Berechnen Sie die Nullstellen von F.

4. a) Schreiben Sie als Integralfunktion mit geeigneter unterer Integrationsgrenze a: $F:\ x \mapsto (2x-3)^2$

   b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion F und deuten Sie dann das Ergebnis von a) geometrisch.
   Hinweis: Betrachten Sie die Nullstelle von F.

5. Gegeben ist die Integralfunktion I durch $I:\ x \mapsto \int\limits_{-1}^x \frac{4t+2}{(t+2)^3}\,dt$.

   a) Zeigen Sie, dass $g(x) = \frac{-4x-5}{(x+2)^2}$ der Term einer Stammfunktion zur Integrandenfunktion von I ist.

   b) Warum ist sicher $g(x) \neq I(x)$?

   c) Ermitteln Sie den genauen Zusammenhang zwischen $g(x)$ und $I(x)$.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: argumentieren, berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Probleme erkunden und Lösungsstrategie entwickeln, Theoriekenntnisse auf konkrete Probleme anwenden
- Modellierung: -
- Medien: Taschenrechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Zusammenhang zwischen Integralfunktion und Integrandenfunktion, HDI und sein Beweis, Folgerungen aus dem HDI

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. a) $$\int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+3x-1\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2-x\right]_{-1}^{3}$$
$$=-\frac{27}{6}+\frac{27}{2}-3-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}-1=\frac{10}{3}$$

b) $$\int_{-2}^{2}\left(3x^3-\frac{5}{9}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{27}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-2}^{2}$$
$$=12-\frac{40}{27}-2+1-12-\frac{40}{27}+2+1=-\frac{26}{27}$$

c) $$\int_{-2}^{3}(2+x)(2-x)\,dx=\int_{-2}^{3}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}=12-9+8-\frac{8}{3}=\frac{25}{3}$$

d) $$\int_{-1}^{-2}(3x-2)^2\,dx=\int_{-1}^{-2}\left(9x^2-12x+4\right)dx=\left[3x^3-6x^2+4x\right]_{-1}^{-2}$$
$$=-24-24-8+3+6+4=-43$$