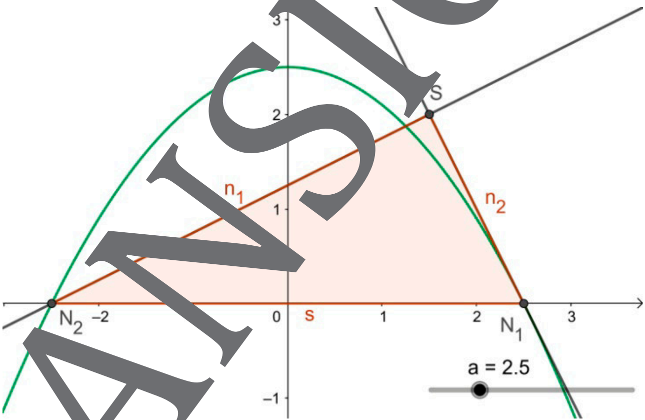
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Parabel und Dreieck

Vermischte Aufgaben zu Analysis und Geometrie

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Parabel und Dreieck

1. Gegeben ist die Parabel $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t in der positiven Nullstelle an die Parabel.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der durch die negative Nullstelle verlaufenden Normale n zur Tangente t aus a), die durch die positive Nullstelle verläuft.
   c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von Tangente und Normale.
   d) Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse und der Punkt S bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

2. Gegeben ist eine Schar von Parabeln $f_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a,\ a > 0$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t in der positive Nullstelle an die Parabel.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der durch die negative Nullstelle verlaufenden Normale n zur Tangente t aus a), die durch die positive Nullstelle verläuft.
   c) Zeigen Sie, dass das Seitenverhältnis der Katheten des Dreiecks, dass von der Tangente, der Normale und der x-Achse eingeschlossen wird, unabhängig von a ist.
   d) Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse und der Punkt S bilden ein Dreieck. Berechnen Sie a so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks 5 FE beträgt.

Anmerkung: Mathematisch korrekt müsste man von der Tangente im Schnittpunkt von Parabel und x-Achse mit der positiven bzw. negativen Nullstelle sprechen. Dies gilt ebenso für die Normale.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie
- Kommunikation:
- Problemlösen: Beweis führen, vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: GeoGebra
- Methode: Einzelarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Parabel, Nullstelle, Tangente, Normale, Seitenverhältnis, Flächeninhalt eines Dreiecks

Autor: Günther Weber

Methodisch-didaktische Hinweise

Bei leistungsstarken Lerngruppen kann sofort Aufgabe 2 gerechnet werden. Aufgabe 1 dient dann zur Kontrolle.
Bei leistungsschwächeren Lerngruppen kann vor der Bearbeitung die allgemeine Aufgabenstellung noch mit einer dynamischen Geometriesoftware veranschaulicht werden.

Lösung

1. a) Zur Bestimmung der Nullstellen wird der Funktionsterm glei ull gesetzt:

$$-\frac{1}{3}x^2+3=0$$

$$-\frac{1}{3}x^2=-3$$

$$x^2=9$$

$$x_1=3;\;\; x_2=-3$$

Der Schnittpunkt der Parabel mit der chse in positiven Nullstelle lautet N_1 (3 | 0).

Die Steigung der Tangente t in N_1 a st gleich der Steigung des Graphen an der Stelle x_1 =

$$f'(x)=-\frac{2}{3}x$$

$$f'(3)=-2$$

Einsetzen der Koo inaten von N_1 ie allgemeine Form der Geradengleichung y = mx + erg m = –2 die Gleichung:

$$0=-2\cdot 3+b$$

$$b=6$$

Die Glei ung r Tangen in N_1 an den Graphen der Funktion f hat die Gleich t(x) =

b) Der Schnittpu der Parabel mit der x-Achse in der negativen Nullstelle lautet (–3 |0). gente und Normale stehen senkrecht aufeinander; es gilt: m_n $=-1$.

$\cdot(-2)=-$

$$m_n=\frac{}{2}$$

Einsetzen der Koordinaten von N_2 in die allgemeine Form der Geradengleichung y = mx + b ergibt die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + b$$

$$b = \frac{3}{2}$$

Die Gleichung der Normale durch den Punkt N_2 der Tangente im Punkt N_2 lautet: $n(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

c) Gleichsetzen der Funktionsterme von Tangente und Normale führt zur Gleichung:

$$-2x + 6 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$4{,}5 = 2{,}5x$$

$$x = 1{,}8$$

Einsetzen von x = 1,8 in die Tangentengleichung liefert:

$$t(1{,}8) = -2 \cdot 1{,}8 + 6 = 2{,}4$$

Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $S(1{,}8 \,|\, 2{,}4)$.

d) Die Flächeninhaltsformel für ein Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h lautet: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Wählt man als Grundseite g den Abstand der Nullstellen, also g = 6, und als Höhe h die y-Koordinate des Schnittpunkts S, so erhält man:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}4 = 7{,}2 \text{ [FE]}$$

Der Flächeninhalt des von der Tangente, der Normale und der x-Achse eingeschlossenen Dreiecks beträgt 7,2 FE.

Konstruktion anhand einer GeoGebra-Datei

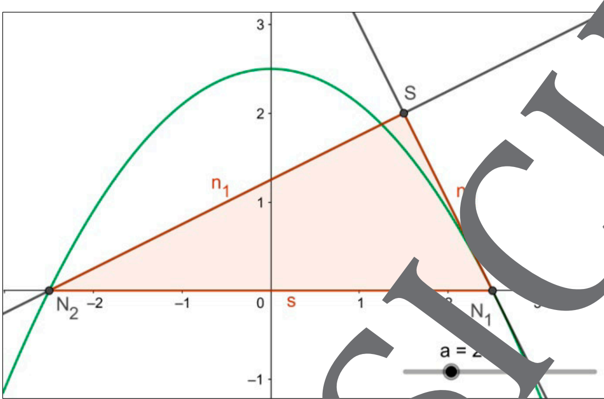


Abb. 2

a = 2.5

0.1 10

$f(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$

$\rightarrow -\frac{1}{2.5}x^2 + 2.5$

Schneide(f, xAchse)

$\rightarrow N_2 = (-2.5, 0)$

$\rightarrow N_1 = (2.5, 0)$

t : Tangente(N_1, f)

$\rightarrow y = -2x + 5$

g : Senkrechte(N_2, t)

$\rightarrow -x + 2y = 2.5$

S = Schneide(g, t)

$\rightarrow (1.5, 2)$

d1 = Vieleck(N_2, N_1, S)

$\rightarrow 5$

n_1 : Strecke(S, N_2, d1)

$\rightarrow 4.472$

n_2 : Strecke(N_1, S, d1)

$\rightarrow 2.236$

s : Strecke(N_2, N_1, d1)

$\rightarrow 5$

$b = \frac{\text{Länge}(n_1)}{\text{Länge}(n_2)}$

$\rightarrow 2$