UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II

Anwendungen der Differenzialrechnung in der Wirtschaft

Kosten und Gewinnfunktionen – Teil 2

RAABE, KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Dr. Jürgen Leitz
Bildnachweis Titel: hyejin kang/iStock / Getty Images Plus/South Korea
Lektorat: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

Anwendungen der Differenzialrechnung in der Wirtschaft – Kosten-und Gewinnfunktionen - Teil 2

Vorbemerkungen – Ausblick

Im Teil 1 zur Anwendung der Differenzialrechnung in der Wirtschaft (Beitrag R. 1. 26) wurden folgende ökonomische Begriffe und deren Darstellung mithilfe von Funktionen behandelt:

- Kosten, Erlös und Gewinn
- Gesamtkosten (Summe aus variablen Kosten und Fixkosten) und Gesamtkostenfunktion
- Degressive und progressive Kosten, Kostenkehre
- Grenzkosten und Stückkosten, Grenz- und Stückkostenfunktion
- Betriebsoptimum und Betriebsminimum
- Lang- und kurzfristige Preisuntergrenze

In diesem 2. Teil geht es um:

- Preis und Preisfunktion bzw. Preis- und Nachfragefunktion/ Preisabsatzfunktion (PAF)
- Erlös und Erlösfunktion
- Gewinn und Gewinnfunktion
- Gewinnzone, Gewinnschwelle und Gewinngrenze, Break-Even-Point
- Maximaler Gewinn und Cournot'scher Punkt

Den Abschluss bilden zwei komplexe (abiturähnliche) Aufgaben.
Die Zusammenfassung und weitere Vermittlung ökonomischer Begriffe erfolgt, wie bereits im Teil 1 geschehen, durch Infoblätter, wobei alle Inhalte und neuen Begriffe anschließend an geeigneten Aufgaben von den Schülern selbständig erarbeitet und angewendet werden. Die Bearbeitung aller Aufgaben kann in arbeitsteiliger Gruppenarbeit mit Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bzw. innerer Differenzierung geschehen.

Eine Zusammenstellung aller Begriffe und Formeln zu diesem Beitrag finden Sie im Online-Archiv.

Kompetenzprofil

- Niveau: einführend
- Fachlicher Bezug: Mathematik und Wirtschaft
- Kommunikation: begründen, argumentieren, vergleichen
- Problemlösen: Darstellungen verwenden, Probleme erkunden, Probleme zerlegen, Ergebnisse reflektieren
- Modellierung: Modellanpassung
- Medien: Computer (GeoGebra, optional)
- Methode: Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ganzrationale Funktionen, Ableitung, Nullstelle, Extremum, Wendepunkt, Schnittpunkt, Kostenfunktionen, Erlös- und Gewinnfunktion, Preisabsatzfunktion, Polypol, Monopol, Kapazitätsgrenze, Gewinnschwelle, Gewinnzone, Betriebsoptimum, Betriebsminimum, kurz- und langfristige Preisuntergrenze, Break-Even-Point, Cournot'scher Punkt

Autor: Dr. Jürgen Leitz

Preis und Erlös im Monopol und im Polypol

Der Erlös (Umsatz) und damit auch der Gewinn aus dem Verkauf eines Produktes sind davon abhängig, mit welchem Preis pro ME das Produkt auf dem Markt angeboten und verkauft wird. Der mögliche Verkaufspreis ist jedoch auch von der Nachfrage nach dem Produkt abhängig (Angebot und Nachfrage bestimmen den Preis) und kann durch eine Funktion p(x) angegeben werden.
Bemerkung: Strenggenommen liegt hier eine Funktion x(p) vor, die sogenannte Nachfragefunktion, da die Verkaufsmenge (Absatzmenge) x vom verkauften Preis p abhängt. Da es jedoch üblich ist, im Koordinatensystem die Mengeneinheiten (ME) auf der waagerechten und die Geldeinheiten (GE) auf der senkrechten Koordinatenachse abzubilden, kommt die Umkehrfunktion p(x) als Preisfunktion zur Anwendung.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der abgesetzten (verkauften) Menge hängt davon ab, ob für das angebotene Produkt ein **Monopol** oder ein **Polypol** vorliegt:
Monopol ist eine Marktform, bei der genau ein Anbieter, der *Monopolist* als alleiniger Anbieter ohne Konkurrenz seine Produkte verkauft (Alleinverkauf).
Im **Polypol** gibt es viele Anbieter (*Polypolisten*) für ein Produkt. Polypol ist der „Normalfall" von Märkten, alternativ spricht man auch von vollständiger Konkurrenz (Verkauf durch viele). Dadurch ergibt sich der Preis aus dem Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage.

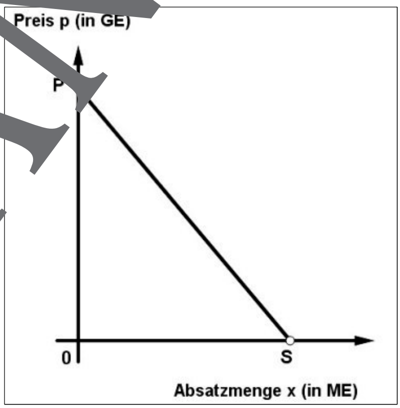
Preisfunktion im Angebotsmonopol und Polypol

(1) Preisfunktion p(x) im Angebotsmonopol

Wenn ein Unternehmen **alleiniger** Anbieter eines Produktes ist, dann spricht man auch von einem **Monopolunternehmen** (vom griechischen *monos* für „allein“) bzw. einem **Angebotsmonopol.** Der Verkaufspreis (Angebotspreis) für das Produkt kann dann von diesem Hersteller (Monopolist) *alleine* bestimmt und variabel gestaltet werden. Hierbei wird erwartet, dass ein geringerer Preis zu größeren Absatzmengen führt (und umgekehrt). Da eine Erhöhung des Angebotspreises im Allgemeinen auch zu einem Rückgang der Nachfrage führt, ist die **Preisfunktion p(x)**, auch **Preisabsatzfunktion (PAF)** genannt, grafisch gesehen eine streng monoton fallende Gerade:

$p(x) = m \cdot x + b$ (mit $m < 0$ und $b > 0$)

Den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen kommen besondere Bedeutung zu:



Schnittpunkt mit der y-Achse (Punkt P):
Die Ordinate ist der höchste Angebotspreis, aber es ist kein Käufer bereit, das Produkt zu diesem Preis zu kaufen. Dieser Preis wird **Sättigungspreis** oder **Prohibitivpreis** genannt.

Schnittpunkt mit der x-Achse (Punkt S):
Die Nullstelle der Preisabsatzfunktion (PAF) ist die größtmögliche Absatzmenge, d. h. die Menge, die nach gefragt werden würde, wenn das Produkt kostenlos (Preis p = 0) angeboten werden würde. Man sagt, dass bei dieser Menge der Markt „gesättigt“ ist. Deshalb wird diese maximal zu verkaufende Menge als **Sättigungsmenge** bezeichnet.

Aufgaben zur Preisabsatz- und Erlösfunktion

1. **Vollständige Konkurrenz – Polypol**
   Die Kapazitätsgrenze eines polypolistischen Betriebs liegt bei 8 ME. Der Marktpreis des hergestellten Produktes beträgt 250 GE.

   a) Wie lautet die Preisabsatzfunktion (PAF)?

   b) Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion an.

   c) Stellen Sie beide Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Wählen Sie dabei für die Ausbringungsmenge auf der x-Achse einen Maßstab von 1 cm ≙ 1 ME und für den Erlös/Preis auf der y-Achse einen Maßstab von 1 cm ≙ 200 GE.
   Hinweis: Stellen Sie eine Wertetabelle mit dem Taschenrechner (WTR) (TABLE-Funktion) auf und tragen die Koordinaten in das Koordinatensystem ein.

   d) Lesen Sie aus der Zeichnung den Erlös für eine Produktion von 6 ME ab sowie die Ausbringungsmenge, bei der ein Erlös von 1000 GE erreicht wird.

   e) Bestätigen Sie die in Teilaufgabe d) abgelesenen Werte durch Berechnung.

   f) Bei welcher Produktionsmenge ist der Erlös maximal?

   g) Welchen maximalen Umsatz kann das Unternehmen erzielen?

Lösungen zu Preisabsatz- und Erlösfunktion

1. **Vollständige Konkurrenz – Polypol**
   Kapazitätsgrenze $x_{Kap} = 8$ ME; Marktpreis $p = 250$ GE

   a) Bei vollständiger Konkurrenz (Polypol) gilt für die PAF:
   $p(x) = p = 250$ GE

   b) Mit $p(x) = 250$ und $E(x) = p(x) \cdot x \;\Rightarrow\; E(x) = 250 \cdot x$

   c) Grafische Darstellung

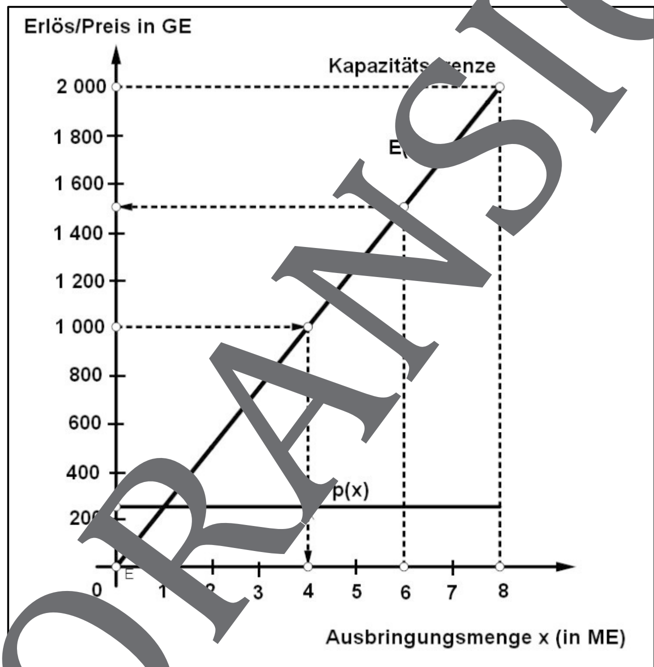


Abb. 1

d) Aus der Zeichnung liest man ab, dass bei einem Absatz von 6 ME ein Erlös von 1500 GE erzielt werden kann und ein Erlös von 1000 GE bei einer Produktionsmenge von 4 ME erreicht wird.

e) $E(6) = 250 \cdot 6 = 1\,500$ (GE)

$E(x) = 1\,000 \;\Leftrightarrow\; 250 \cdot x = 1\,000 \;\Rightarrow\; x = 4$ (ME)

f) Der Graph der Erlösfunktion ist eine streng monoton wachsende Gerade. Somit kann das Unternehmen den maximalen Erlös bei Absatz der maximal möglichen Produktionsmenge, also bei 8 ME (Kapazitätgrenze) erreichen.

g) Aus der Abb. 1 in Teilaufgabe c) ist zu erkennen, dass der maximale Erlös 2 000 (GE) beträgt.
Kontrolle: $E(8) = 250 \cdot 8 = 2\,000$ (GE)

2. **Monopol**

Prohibitivpreis: p = 200 (GE); Sättigungsmenge x = 20 (ME)

a) Der Graph der PAF ist eine fallende Gerade, die durch den Prohibitivpreis und die Sättigungsmenge $\left(\text{Punkte } P(0|200) \text{ und } S(20|0)\right)$ festgelegt ist.

Die Gleichung lautet allgemein: $p(x) = m \cdot x + b$ mit $m < 0$ und $b > 0$

$b = 200$ ist durch den Punkt $P(0|200)$ bestimmt.

Für die Steigung m gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200 - 0}{0 - 20} = -10$$

Damit lautet die PAF:

$$p(x) = -10 \cdot x + 200$$

b) Mit $p(x) = -10 \cdot x + 200$ und $E(x) = p(x) \cdot x$ folgt:

$$E(x) = (-10 \cdot x + 200) \cdot x = -10 \cdot x^2 + 200 \cdot x$$

Infoblatt
Zusammenhang Kosten, Erlös und Gewinn im Produktionsbetrieb

Aus dem Erlös muss ein Unternehmen zunächst einmal die Kosten decken, bevor der tatsächlich erwirtschaftete Gewinn ermittelt werden kann.
Sie wissen bereits, dass der Gewinn mithilfe der Differenz aus Erlös und Kosten ermittelt werden kann.
Somit gilt für die Gewinnfunktion G(x) mit der Erlösfunktion E(x) und der Kostenfunktion K(x):
$G(x) = E(x) – K(x)$
Dabei hängt die Struktur der Gewinnfunktion von der Form der Erlösfunktion und der Gesamtkostenfunktion ab (z. B. K(x) als Polynom 3. Grades und E(x) als quadratische Funktion im Falle eines Monopols.)
Bemerkung: Wie bereits schon zuvor angemerkt (in Teil 1), wird auch hier bei allen weiteren Betrachtungen unter Gewinn stets der Rohgewinn aus dem Absatz (Verkauf) verstanden.

Bei der Gewinnermittlung gibt es drei mögliche Fälle:

- $E(x) > K(x)$, also $G(x) > 0$: Das Unternehmen erzielt einen Gewinn.
- $K(x) > E(x)$, also $G(x) < 0$: Das Unternehmen erzielt keinen Gewinn, sondern macht Verlust (negativer Gewinn).
- $E(x) = K(x)$, also $G(x) = 0$: Es wird weder ein Gewinn noch ein Verlust erzielt, die Erlöse (Einnahmen) decken gerade die Kosten ab.

Gewinnschwelle und Gewinngrenze ⇒ Gewinnzone

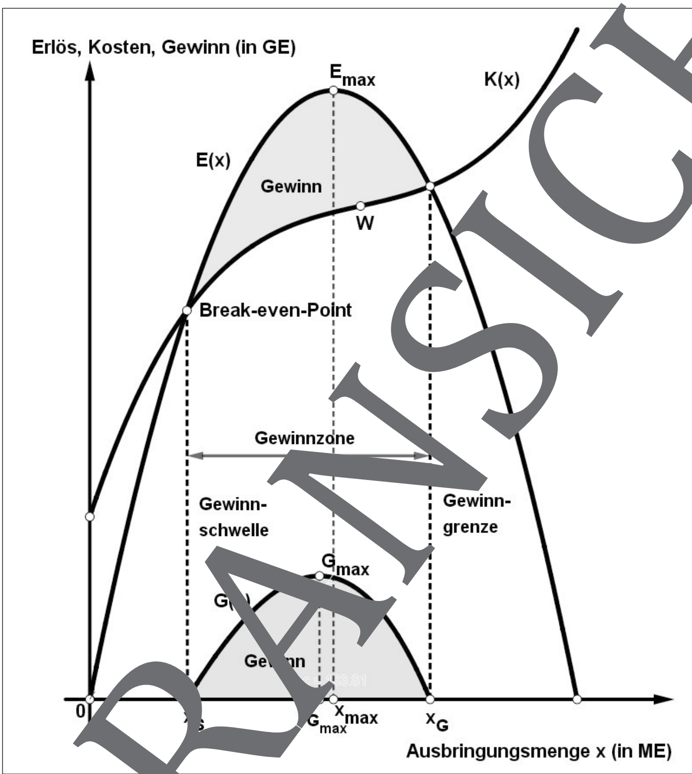


Abb.

(2) Gewinnmaximum

Ziel eines jeden Unternehmens ist die Maximierung des Gewinns. Von besonderem Interesse ist hierfür die Kenntnis der **gewinnmaximalen Absatzmenge $x_{G_{max}}$** und des zugehörigen **gewinnmaximalen Preises $p_{G_{max}}$**. Mathematisch ist $x_{G_{max}}$ der x-Wert des Maximums der Gewinnfunktion G(x).
Bedingung für einen Hochpunkt:
$G'(x) = 0 \text{ und } G''(x) < 0 \quad \Rightarrow x = x_{G_{max}}$

Der Funktionswert $G\left(x_{G_{max}}\right)$ gibt den **maximalen Gewinn** an.

Mithilfe von $x_{G_{max}}$ kann auf dem Graphen der PAF p(x) der zugehörige gewinnmaximale Preis abgelesen werden: $p_{G_{max}} = p\left(x_{G_{max}}\right)$

Die gewinnmaximale Menge $x_{G_{max}}$ ist aber auch die Schnittstelle des Graphen der Grenzkostenfunktion $K_G(x)$ mit dem Graphen der Grenzerlösfunktion $E_G(x)$, denn aus
$G(x) = E(x) - K(x)$ folgt $G'(x) = E'(x) - K'(x) = E_G(x) - K_G(x)$ und damit: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow E_G(x) = K_G(x)$

Bemerkung: Im Allgemeinen ergibt sich der maximale Gewinn nicht bei der Menge x_{max} für den maximalen Erlös und auch nicht bei der Menge, bei der die Stückkosten minimal sind, dem Betriebsoptimum x_{opt} bzw. BO (vgl. Abb. 4 auf der folgenden Seite).

(3) Cournot'scher Punkt $C(x_C \mid p_C)$

Wählt man im Falle eines Monopolisten die gewinnmaximale Menge $x_{G_{max}}$ als Abszisse für einen Punkt C auf der PAF p(x), dann kommt diesem Punkt eine besondere Bedeutung zu: Er heißt **Cournot'scher Punkt C**, benannt nach dem französischen Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler Antoine-Augustin Cournot, und gibt den gewinnmaximalen Zusammenhang zwischen festgesetzten Preis und der zu erwartenden Nachfragemenge an:

$x_C = x_{G_{max}}$ und $p_C = p\left(x_{G_{max}}\right) = p_{G_{max}}$ (vgl. Abb. 3 auf Seite 20)