# UNTERRICHTS MATERIALIEN

## Analysis Sek. II

**Kettenbrüche und deren Anwendung**

Einen Algorithmus finden

RAABE

KLASSE SCHULE

**Impressum**

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II



Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Bildnachweis Titel: ThomasVogel/Getty Images Plus/E+
Korrektorat: Markus Hensgens

# Kettenbrüche und deren Anwendung

Eine Darstellungsmöglichkeit einer reellen Zahl ist die Darstellung als sogenannter Kettenbruch. Ausgehend von einer Begriffsdefinition des regelmäßigen Kettenbruchs soll zunächst ein CAS-tauglicher Algorithmus gefunden werden, der hilft, reelle Zahlen in Kettenbrüche umzuwandeln. Anschließend sollen zunächst rationale und dann irrationale Zahlen als Kettenbrüche geschrieben werden.

Im Detail soll es dabei um den Zusammenhang zwischen Kettenbrüchen und

- Euklidischem Algorithmus,
- gebrochenrationalen Funktionen,
- quadratischen Gleichungen,
- der Lösung einer Diophantischen Gleichung,
- der rationalen Näherung einer irrationalen Zahl

gehen. Am Schluss sollen besondere irrationale Zahlen (e, π, φ oder weitere) betrachtet werden. Dies führt dann zu einer Aufspaltung des irrationalen Zahlbereichs. Sätze und Verfahren sollen weitgehend ohne Beweis durch Beispiele veranschaulicht und plausibel gemacht werden. Die Verwendung eines Computer-Algebra-Systems ist zweckmäßig.

**Kompetenzprofil**

- Niveau: weiterführend
- Fachlicher Bezug: Zahlentheorie
- Kommunikation: präsentieren
- Problemlösen: Probleme erkunden, vernetztes Denken
- Modellierung: –
- Medien: Computer (CAS)
- Methode: Facharbeit
- Inhalt in Stichworten: Kettenbruch, Euklidischer Algorithmus, gebrochenrationale Funktion, quadratische Gleichung

**Autor:** Roland Schröder

## Lösung

1. Voraussetzungen

   a) **Brüche, Doppelbrüche, Dezimalbrüche**

   Brüche mit Bruchstrich besitzen eine Dezimalbruchdarstellung, die entweder abbricht oder periodisch verläuft. Nichtabbrechende, nichtperiodische Dezimalbrüche können nicht mit Bruchstrich dargestellt werden. Solche Bruchzahlen heißen irrational. Bruchzahlen, die größer sind als 1, können als Summe eines ganzen und eines gebrochenen Teils geschrieben werden. Der Kehrwert einer Bruchzahl unter 1 ist größer als 1.

   **Beispiele:**

   - Der Bruch $\frac{13}{8}$ kann beispielsweise geschrieben werden als $1+\frac{5}{8}$ oder 1,875.
   - Die Bruchzahl $\frac{5}{8}$ kann als Doppelbruch dargestellt werden: $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}}$ oder $\frac{1}{1+\frac{3}{5}}$

- Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wird unvollständig als 1,414213562… dargestellt. Sie ist die Summe aus 1 und $\sqrt{2}-1$ Der Kehrwert von $\sqrt{2}-1$ ist $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ oder nachdem der Nenner rational gemacht wurde $\sqrt{2}+1$.

  Demnach gilt: $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

b) **Kettenbrüche, regelmäßige Kettenbrüche**

Für ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ heißt

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}}$$

Kettenbruch. Wenn $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$, dann heißt der Kettenbruch regelmäßig. In diesem Falle genügt es, die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zu nennen und man schreibt:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

c) **Entwicklung eines Kettenbruchs aus einem Bruch und umgekehrt**

Wie wir unter Teilaufgabe a) gesehen haben, kann man jede Bruchzahl aufspalten in eine Summe aus einer ganzen Zahl $a_0$ und einer gebrochenen Zahl g mit $0<g<1$. Dann lässt sich der Kehrwert von g wiederum als Summe einer ganzen Zahl $a_1$ und einer gebrochenen Zahl darstellen.
Um aus einem Bruch einen Kettenbruch zu erzeugen, muss man:

*Schritt 1:* Wenn möglich, einen ganzzahligen Summanden $a_0$ abspalten.

*Schritt 2:* Aus dem Kehrwert des gebrochenen Anteils wieder den ganzzahligen $a_1$ Summanden abspalten.

*Schritt 3:* Den Bruch $a_0+\frac{1}{a_1+g}$ mit ganzen Zahlen $a_0$ und $a_1$ sowie einer gebrochenen Zahl g notieren.

*Schritt 4:* Auf den Kehrwert von g wieder *Schritt 1* und *Schritt 2* anwenden sowie in *Schritt 3* einsetzen.

**Beispiel:** $\frac{70}{51}$

*Schritt 1:* Von Brüchen größer als 1 wird im ersten Schritt ein ganzzahliger Teil abgespalten:

$$\frac{70}{51}=1+\frac{19}{51}$$

*Schritt 2:* Vom gebrochenen Teil wird der Kehrwert in der gleichen Weise behandelt:

$$\frac{51}{19}=2+\frac{13}{19}$$

*Schritt 3:* Davon der Kehrwert kann dann als $\frac{1}{2+\frac{13}{19}}$ geschrieben werden

und für $\frac{19}{51}$ eingesetzt werden:

$$\frac{70}{51}=1+\frac{1}{2+\frac{13}{19}} \qquad (*)$$

*Schritt 4:* Wieder wird der Kehrwert des letzten gebrochenen Teils $\frac{13}{19}$ zerlegt:

$\frac{19}{13}=1+\frac{6}{13}$ und folglich $\frac{13}{19}=\frac{1}{1+\frac{6}{13}}$

Das Einsetzen dieses Bruches in (*) ergibt:

$$\frac{70}{51}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{6}{13}}}$$

Das Verfahren endet, wenn der Zähler des letzten gebrochenen Teils 1 ist, also hier bereits im nächsten Schritt:

$\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$ und demnach $\frac{6}{13}=\frac{1}{2+\frac{1}{6}}$

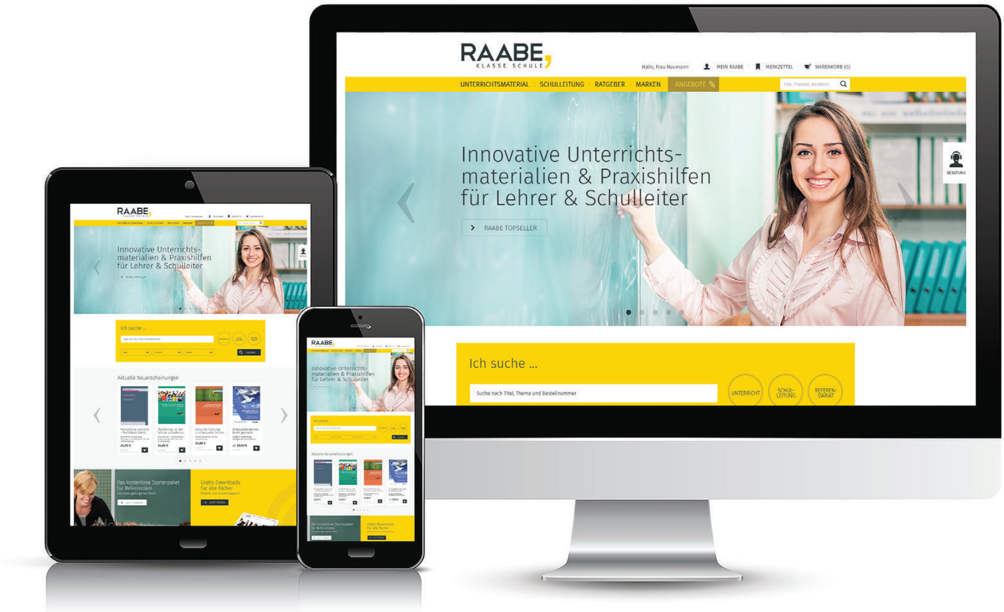
$$\frac{70}{51}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}}$$

Da die Kettenbruchschreibweise sehr umständlich ist, schreibt man auch

$\frac{70}{51}=[1;2;1;2;6]$, notiert also alle gefundenen ganzzahligen Anteile sowie den Nenner des letzten Stammbruchs.

RAABE,
KLASSE SCHULE

# Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!




## Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

## Mehr unter: www.raabe.de