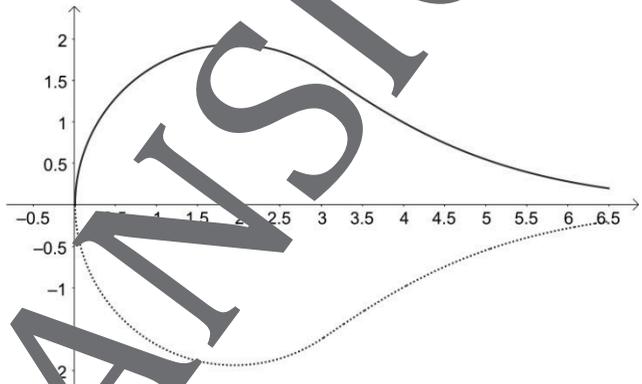


# UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



**Berechnungen am Rotationskörper**

Volumen und Mantelfläche bestimmen

## Impressum

### RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmitteln (z. B. Abs. 1 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth  
Satz: Rösel & CIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe  
Illustrationen: Günther Weber  
Bildnachweis Titel: Günther Weber  
Layout: Dipl.-Math. Dr. rer. Nat. Yvonne Raden

## Berechnungen am Rotationskörper

Gegeben ist der Graph der Funktion  $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{-x}$ ;  $0 \leq x \leq 6,5$ .

Rotiert der Graph der Funktion  $f$  um die  $x$ -Achse, so entsteht das Innenummer eines kolbenförmigen Gefäßes (siehe Abbildung 1);  $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$

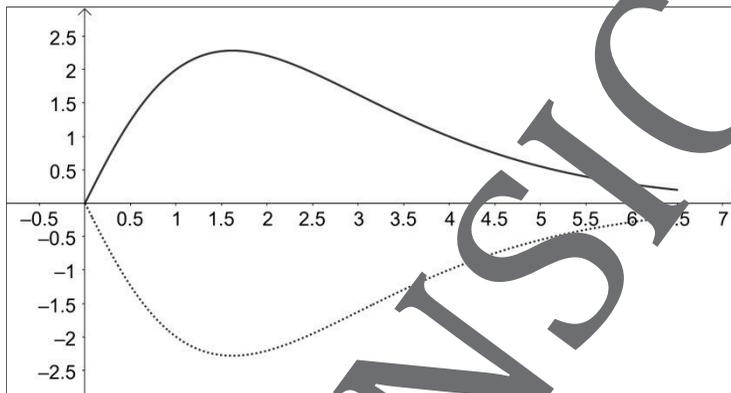


Abb. 1

- a) Bestimmen Sie den maximalen Durchmesser und die Breite der Öffnung des Gefäßes.
- b) Das Gefäß kann bis zu einer Höhe von 6 cm gefüllt werden. Berechnen Sie die Füllmenge (in ml) eines vollen Gefäßes.

## Tippkarte

### Rotationskörper

Rotiert der Graph einer Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a; b]$  um die  $x$ -Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

und der Mantelfläche:

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

### Kreisgleichung

Ein Kreis mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M(x_m | y_m)$  hat die Kreisgleichung:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

### Kugelsegment

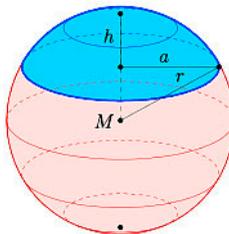
Ein Kugelsegment habe den Radius  $r$  sowie den Grundkreisradius  $a$  und die Höhe des Segments  $h$  (siehe nebenstehende Abbildung). Das Volumen eines Kugelsegments lässt sich dann nach der Formel:

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) \quad \text{oder} \quad V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3a^2 + h^2),$$

die Mantelfläche (Kugelkappe) nach der Formel:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot (a^2 + h^2)$$

berechnen.



Ag2gaeH/Kugelkappe, Kugelsegment/  
Wikimedia Commons – CC BY-SA 2.0.

**Kompetenzprofil**

- Niveau: grundlegend/weiterführend
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: Lösungen vorstellen
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln und vergleichen
- Medien: GTR/CAS
- Methode: Einzelarbeit, Partnerarbeit
- Inhalt in Stichworten: Exponentialfunktion, knickfrei, Extrempunkt, Rotationskörper (Volumen und Mantelfläche), Kugelsegment (Volumen und Mantelfläche), Prozentrechnung

**Autor:** Günther Weber

**Didaktisch-methodische Anmerkungen**

Insbesondere bei leistungsschwächeren Kursen bietet es sich an, die Vorüberlegungen zum Lösungsweg im Unterrichtsgespräch zu erarbeiten. Zeitgleich kann dann die Konstruktion mit Geogebra oder Euklid-Dynageo durchgeführt werden.

Nach der Konstruktion ist eine Lösungsvorstellung der Variablen möglich. Dies ist vorteilhaft, da man erkennt, dass es 2 Lösungen bei Aufgabe 2 gibt.

Aufgabe 3 kann arbeitsteilig von 2 Gruppen gelöst werden; jede Gruppe arbeitet mit einer der in Aufgabenteil 2 gefundenen Lösungen.

Zur Differenzierung nach Leistungsstärke können die Formeln für das Kugelsegment aus den Formeln für den Rotationskörper hergeleitet werden. Zudem kann eine Stammfunktion zur Funktion  $g(x) = (f(x))^2$  bestimmt werden.

### Lösung

1. a) Der maximale Durchmesser entspricht dem Doppelten des absoluten Maximums im Definitionsbereich. Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist:  $f'(x) = 0$ . Eine Ableitung der Funktion  $f$  mit Hilfe der Ketten- und Produktregel ergibt:

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{1-x} + (x^2 + x) \cdot (-e^{1-x})$$

$$= e^{1-x} \cdot (-x^2 + x + 1)$$

$$e^{1-x} \cdot (-x^2 + x + 1) = 0 \quad | :(-e^{1-x}) \neq 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,62; x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \notin D$$

$f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{1-x}  _{0 \leq x \leq 6.5}$	1.0000
$aIf(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$	1.0000
$aIf(x) = \left\{ -(x^2 - x) \cdot e^{1-x} \right\}$	1.3
$\text{solve}(aIf(x)=0, x)$	$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
$\text{solve}(f(x)=0, x)$	$x = 1.61803$

Hinreichende Bedingung für eine Maximumstelle:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$ .

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{1-x} + (x^2 + x) \cdot (-e^{1-x})$$

$$= e^{1-x} \cdot (-x^2 + 3x)$$

$$= e^{1-x} \cdot x \cdot (x - 3)$$

$$f''(x) = e^{-0,62} \cdot 1,62 \cdot (-1,38) < 0$$

At der Stelle  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,62$  liegt ein relatives Maximum vor.

Die Vorüberlegungen können mit Geogebra veranschaulicht werden:

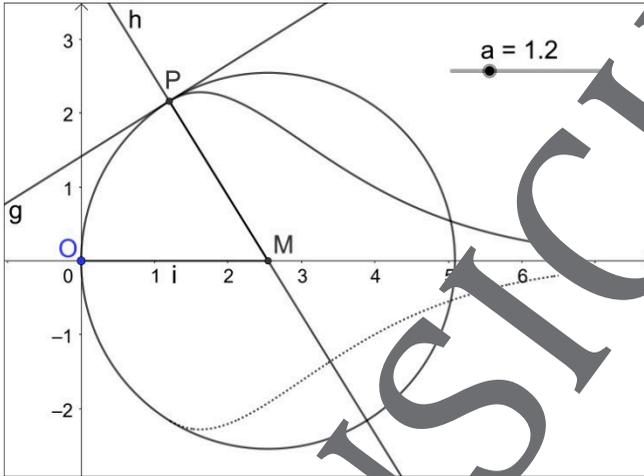


Abb. 3

Die folgende Tabelle zeigt die Konstruktionsschritte:

$a = 1.2$ 	
$f(x) = \text{Wenn}(a \leq x \leq 6.5, (x^2 + 1) e^{1-x})$ $\rightarrow (x^2 + x) e^{1-x}, (1.2 \leq x \leq 6.5)$	
$f_1 = \text{Spiegel}(f, x\text{Achse})$ $\rightarrow y = -\text{Wenn}(1.2 \leq t \leq 6.5, (t^2 + t) e^{1-t})$	
$P = (a, f(a))$ $\rightarrow (1.2, 2.161)$	
$g: \text{Tangente}(P)$ $\rightarrow y = 0.622x + 1.415$	
Senkrechte(P, g) $x - 0.622y = -2.545$	
	$M = \text{Schneide}(h, x\text{Achse})$ $\rightarrow (2.545, 0)$
	$i: \text{Strecke}(O, M)$ $\rightarrow 2.545$
	$j: \text{Strecke}(P, M)$ $\rightarrow 2.546$
	$c: \text{Kreis}(M, P)$ $\rightarrow (x - 2.545)^2 + y^2 = 6.481$

3. a) Die Kreisgleichung  $k$  für einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(r_1)$  und dem Radius  $r$  lautet:

$$k(x) = \sqrt{2rx - x^2} = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Eine Ableitung mithilfe der Potenz- und Kettenregel lautet

$$k'(x) = \frac{1}{2}(2r - 2x) \cdot (2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r - x}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Einsetzen von  $a_1 = 1,2$  ( $a_2 = 3,03$ ) und  $r_1 = 2,54$  ( $r_2 = 1,95$ ) in die Mantelformel für das Kugelsegment bzw. in die Mantelflächenformel für den Rotationskörper im Intervall  $[0; a_1]$  ( $[0; a_2]$ ) liefert die Größe der Mantelfläche.

$a1$	1.2	$a2$	3.03
$r1=2.54$	2.54	$r2=1.95$	1.95
$m1=2 \cdot \pi \cdot r1 \cdot a1$	19.1511	$m2=2 \cdot \pi \cdot r2 \cdot a2$	37.1242
$a1k1(x) = \frac{d}{dx}(k1(x))$	Fertig	$a1k2(x) = \frac{d}{dx}(k2(x))$	Fertig
$2 \cdot \pi \int_0^{a1} (k1(x) \cdot \sqrt{1+(a1k1(x))^2}) dx$		$2 \cdot \pi \int_0^{a2} (k2(x) \cdot \sqrt{1+(a1k2(x))^2}) dx$	
	19.1511		37.1242

Die Mantelfläche des Kugelsegments hat eine Größe von 19,15 cm<sup>2</sup> bzw. von 37,12 cm<sup>2</sup>.

- b) Das Kugelsegment von Gefäß 1 ( $a_1 = 1,2$ ,  $r_1 = 2,54$ ) hat ein Volumen von 9,73 cm<sup>3</sup>. Das Gesamtvolumen des Gefäßes beträgt 12,13 cm<sup>3</sup>. Da die Hälfte des Volumens größer als die Hälfte des Gesamtvolumens ist, muss die Markierung  $m$  auf der Mantelfläche des Rotationskörpers angebracht werden.

$\frac{v1}{2}$	21.0665
$\frac{v1}{2} - v1_{ks}$	11.3631
$\Delta \text{solve} \left( \pi \int_{a1}^m (f(x))^2 dx = \frac{v1}{2} - v1_{ks}, m \right)$	
	$m=1.91203$

## **Dieses Werk ist Bestandteil der Reihe RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß §60b UrhWissG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung herunterzuladen, zu speichern und in Klassensatzstärke auszudrucken. Jede darüber hinausgehende Nutzung sowie die Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig. Darüber hinaus sind Sie nicht berechtigt, Copyrightvermerke, Markenzeichen und/oder Eigentumsangaben des Werks zu verändern.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**