Unendliche Variantenvielfalt – Übung mathematischer Regeln

von Wolfgang Lübbe

© Yagi Studio/Getty Images Plus/Digital Vision

In diesem Beitrag ...d ge... ...tionale Funktionen Gegenstand umfangreicher Betrachtungen. Ziel ist es, ...e grenzenlose Fülle der sich daraus ergebenden Möglichkeiten zur Wieder... Übung u... Anwendung mathematischer Regeln, Algorithmen und Berechnun...en in der ...ferential- und der Integralrechnung darzustellen und ihre Nutzung im Unte...icht anzurege...

Unendliche Variantenvielfalt – Übung mathematischer Regeln

von Wolfgang Lübbe

Kompetenzprofil

Inhalt: grafische Darstellung, Definitionsbereich, Wertebereich, Ableitungsfunktion, Nullstelle, Anstieg, Tangente, Schnittwinkel, Symmetrie, Polstelle, Grenzwert, Polynomdivision, Asymptote, Lokale Extrema, Schnittpunkt, Lösen von Gleichungs-systemen, Flächeninhaltsberechnungen

Medien: evtl. CAS

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3), mathematische Darstellungen verwenden (K 4)

Unendliche Variantenvielfalt – Übung mathematischer Regeln

Methodisch-didaktische Hinweise

In diesem Beitrag sind die gebrochenrationalen Funktionen der Form $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ Gegenstand umfangreicher Betrachtungen.
Ziel des Beitrags ist es, die grenzenlose Fülle der sich daraus ergebenden Möglichkeiten zur Wiederholung, Übung und Anwendung mathematischer Regeln, Algorithmen und Berechnungen in der Differential- und der Integralrechnung darzustellen und ihre Nutzung im Unterricht anzuregen.
Dabei werden für die Funktionen 1–6 unterschiedliche Kenndaten vorgegeben, auf deren Basis die fehlenden Parameter a–e und somit die Funktionsgleichungen rekonstruiert werden können. Anschließend sollen die fehlenden Kenngrößen und Eigenschaften der Funktionen ermittelt werden. Dazu sind im Beitrag einige Hinweise zu den Lösungswegen angegeben. In den Aufgabenblättern sind die Parameterwerte bzw. Kenngrößen der Funktionen angegeben und Felder zum Eintragen der Ergebnisse vorbereitet.
Alle Aufgaben können ohne Zuhilfenahme eines CAS bearbeitet werden. Andererseits erleichtert die Nutzung eines CAS insbesondere das Bilden der Ableitungsfunktionen, die Berechnung lokaler Extrema, das Lösen entsprechender Gleichungssysteme, die Flächeninhaltsberechnungen sowie die grafische Darstellung der Funktionen, der Tangenten und der Asymptoten im kartesischen Koordinatensystem.
Mithilfe der Farbfolie können Sie die grafische Lösung der ersten Funktion beispielhaft im Plenum besprechen.

Aufgaben

Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion mit den Parametern a–e der Form

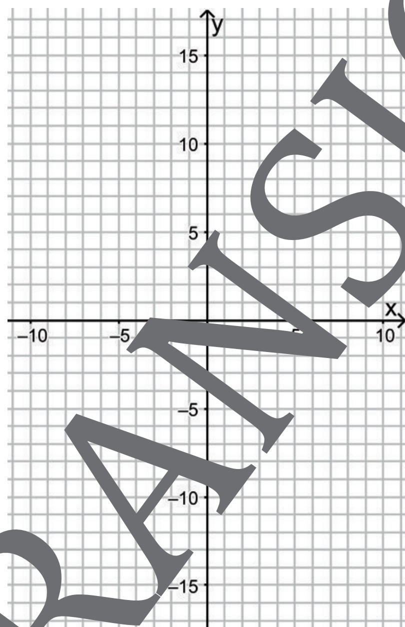
$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}; a \neq 0; d \neq 0$$

Vervollständigen Sie die Angaben auf dem Arbeitsblatt. Stellen Sie den Graphen der Funktion f(x), die Tangenten und die Asymptoten im kartesischen Koordinatensystem des Arbeitsblattes dar.

Legende

f, f ,, f ,’	Funktion; 1. und 2. Ableitungsfunktion
x_1; x_2	Nullstellen der Funktion
$S_{x1}; S_{x2}; S_y$	Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit den Koordinatenachsen
$m_{x_1}; m_{x_2}; m_y$	Anstieg des Graphen der Funktion in
$y_1; y_2; y_3$	Tangenten an den Graphen der Funktion in
$\alpha_{x_1}; \alpha_{x_2}; \alpha_y$	Schnittwinkel der Tangenten mit der x-Achse
s_t	Schnittpunkt der Tangenten
α_t	Schnittwinkel der Tangenten

Funktion 1				
a =	b =	c =	d =	e =
f(x) =	f ′(x) =	f ′′(x) =		

Def.bereich:		Wertebereich:
S_{x_1} (−3 | 0)		S_{x_2} (| 0)
m_{x_1} =		m_{x_2} =
α_{x_1} =		α_{x_2} =
Tangente in S_{x_1} y_1 =		Tangente in S_{x_2} y_2 =
S_y (0 | 4,5)		m_y =
Tangente in S_y y_3 =		α_3 =
S_t (|)		α_t =
Asymptote in x x =		Asymptote schräg y =
Lok. Min. E_{min} (|)		Lok. Max. E_{max} (4 | −3,5)
Symmetrie	Polstelle: x_p = 0,5	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = f(x) =$

Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall $[x_1; x_2]$

A = FE

Lösungen

Funktion 1

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

$x_{N_1}=-3:$

$$0=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$$
$$0=9a-3b+c \qquad (1)$$

$x_p=0{,}5:$

$$d\cdot 0{,}5+e=0$$
$$d=-2e \qquad (2)$$

$S_y(0\,|\,4{,}5):$

$$4{,}5=\frac{c}{e}$$
$$c=4{,}5e \qquad (3)$$

$E_{max}(4\,|-3{,}5):$

$$-3{,}5=\frac{a\cdot 4^2+b\cdot 4+c}{d\cdot 4+e}$$
$$-14d-3{,}5e=16a+4b+c \qquad (4)$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)\cdot(dx+e)-(ax^2+bx+c)\cdot d}{(dx+e)^2}$$
$$=\frac{2adx^2+2aex+bdx+be-adx^2-bdx-cd}{(dx+e)^2}$$
$$=\frac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \quad adx^2+2aex+be-cd=0$$
$$ad\cdot 4^2+2ae\cdot 4+be-cd=0$$
$$16ad+8ae+be-cd=0 \qquad (5)$$

$(2)\rightarrow(4)$

$$-14\cdot(-2e)-3{,}5e=16a+4b+c$$
$$24{,}5e=16a+4b+c \qquad (6)$$

$(3)\rightarrow(6)$

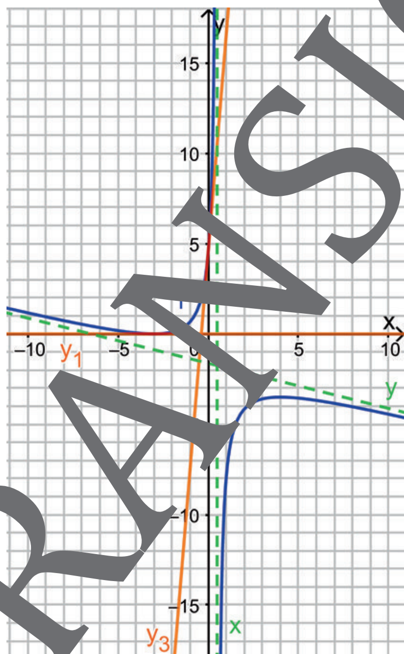
$$25{,}5e=16a+4b+4{,}5e$$
$$20e=16a+4b \qquad (7)$$

$(3)\rightarrow(1)$

$$0=9a-3b+4{,}5e$$
$$-4{,}5e=9a-3b \qquad (8)$$

Funktion 1				
$a = \frac{2}{3}$	$b = 4$	$c = 6$	$d = -\frac{8}{3}$	$e = \frac{4}{3}$

$f(x) = \dfrac{\frac{2}{3}x^2 + 4x + 6}{-\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}}$	$f'(x) = \dfrac{-\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{64}{3}}{\left(-\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right)^2}$	$f''(x) = \dfrac{\frac{128}{9}x + \frac{16}{27}}{\left(-\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right)^3}$



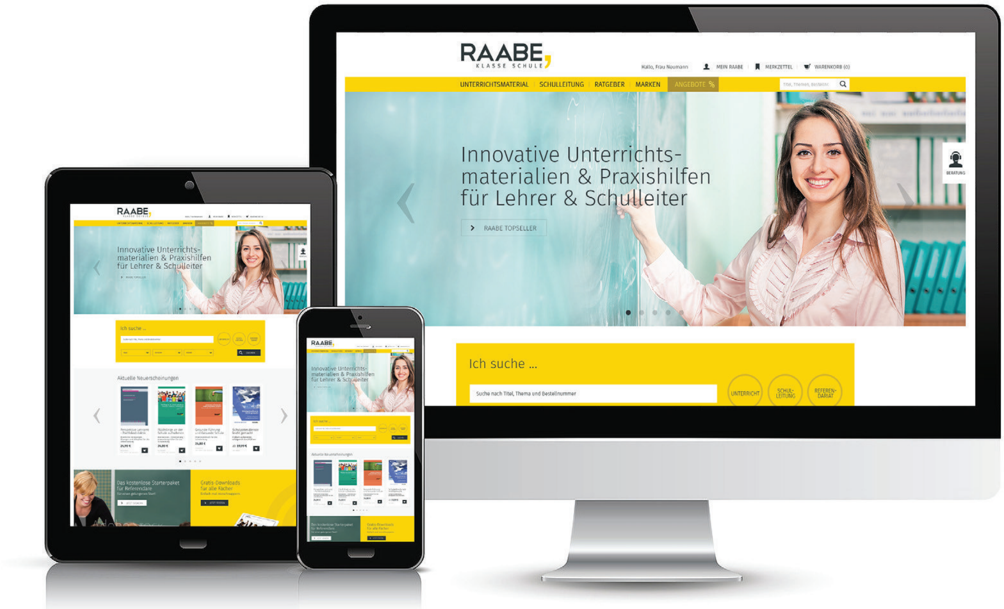
Def.bereich: $x \in \mathbb{R}; x \neq 0{,}5$	Wertebereich: $0 \leq y \leq -3{,}5$
$S_{x_1}(-3 \mid 0)$	$S_{x_2}(- \mid -)$
$m_{x_1} = 0$	$m_{x_2} = -$
$\alpha_{x_1} = 0$ 0	$\alpha_{x_2} = -$
Tangente in S_{x_1} $y_1 = 0$	Tangente in S_{x_2} $y_2 = -$
S_y (0 | 4,5)	$m_y = 12$
Tangente in S_y $y_3 = 12x + 4{,}5$	$\alpha_3 = 85{,}2°$
S_t (– | –)	$\alpha_t = -$
Asymptote in x_p $x = 0{,}5$	Asymptote schräg $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{8}$
Lok. Min. E_{min} (– | 0)	Lok. Max. E_{max} (4 | –3,5)

Symmetrie: keine	Polstelle: $x_p = 0{,}5$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = f(x) = \mp\infty$

Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall $[x_1; x_2]$

A = – FE

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de