Gestufter Körper aus Einheitswürfeln – Anzahl und Wahrscheinlichkeit

von Günther Weber

© afsezen/Getty Images Plus/iStock

Verschiedene Bereiche des Faches Mathematik verknüpfend, beschäftigen sich Ihre Schüler in diesem Beitrag mit Aufgaben zu Stochastik und Analysis. Die Lernenden vollziehen zunächst das Modell eines gestuften Körpers aus Einheitswürfeln nach, indem sie dieses nachbauen oder sich mit einer Excel-Tabelle behelfen. Danach bestimmen sie den Funktionsterm ganzrationaler Funktionen, Grenzwerte und Extrempunkte sowie Laplace-Wahrscheinlichkeiten und den Erwartungswert.

RAABE KLASSE SCHULE

Gestufter Körper aus Einheitswürfeln – Anzahl und Wahrscheinlichkeit

von Günther Weber

Kompetenzprofil

Inhalt: Bestimmen des Funktionsterms ganzrationaler Funktionen, streng monoton steigend/fallend, Grenzwert, Extrempunkte, Laplace Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, (Summenformeln)

Medien: CAS, Excel

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5), mathematisch kommunizieren (K 6)

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.	
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Bestimmung der Würfelanzahl und Wahrscheinlichkeit

Einheitswürfel (Würfel mit der Kantenlänge 1) können zu quadratischen Säulen mit der Höhe 1 cm zusammengelegt werden (siehe Abbildung 1).

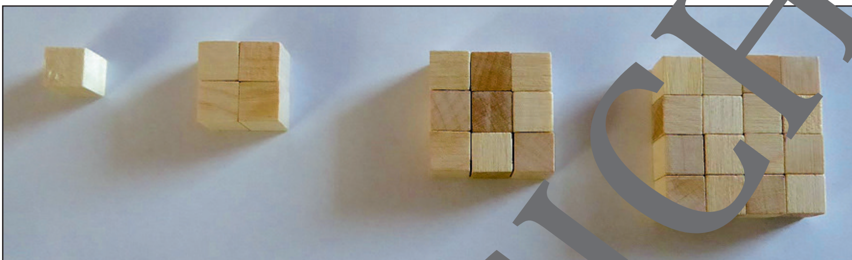


Abb. 1

© Günther Weber

Stapelt man jetzt die quadratischen Säulen übereinander, sodass sie eine gemeinsame Kante haben und die Seitenlänge der Quadrate von oben nach unten jeweils um 1 cm zunimmt, so entsteht ein gestufter Körper. In Abbildung 2 bzw. 3 ist ein gestufter Körper der Höhe 4 zu sehen). Die Höhe des Körpers und die Grundseitenkante stimmen bei diesem Körper überein.

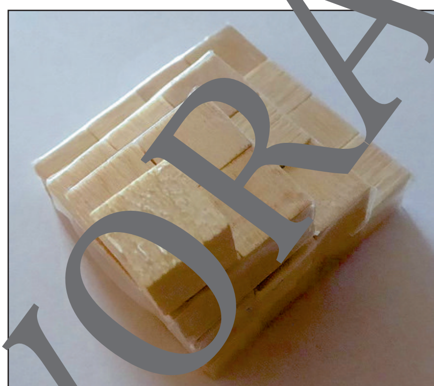


Abb. 2

© Günther Weber

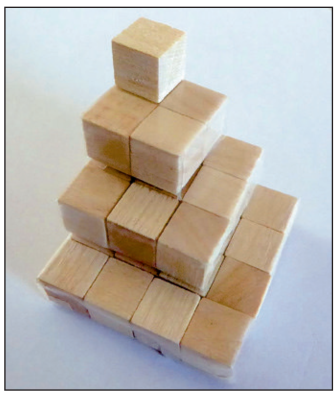


Abb. 3

© Günther Weber

Vergrößerung des Stufenkörpers von 4 auf 5 Schichten

1. Schritt

Kopieren Sie die Anzahl der Punkte der Einheitswürfel des Stufenkörpers der Höhe 4, die in der untersten Schicht liegen und überdeckt sind (A11:C13), und fügen Sie in die Tabelle ein (A16:C18).
Lassen Sie rechts und unterhalb der eingefügten Zahlen einen Bereich mit 5 Zellen frei (A19:E19 bzw. D16:D20).
Fügen Sie die restlichen Anzahlen der Punkte der Einheitswürfel der untersten Schicht des Stufenkörpers der Höhe 4 unterhalb bzw. rechts neben den freien Zellen ein.

	A	B	C	D	E
1	Schicht 1				
2	5				
3	Schicht 2				
4	2	3			
5	3	3			
6	Schicht 3				
7	2	1	3		
8	1	2	2		
9	3	2	3		
10	Schicht 4				
11	3	2	2	4	
12	2	1	1	3	
13	2	1	1	3	
14	4	3	3	4	
15	Schicht 5				
16	3	2	2		4
17	2	1	1		3
18	2	1	1		3
19					
20	4	3	3		4

Abb. 6

Aufgaben

1.

a) Ist a(n) die Gesamtanzahl der Einheitswürfel bei einem gestuften Körper der Höhe n und $a_0(n)$ die Anzahl der Einheitswürfel mit 0 Punkten bei einem gestuften Körper der Höhe n ($n \geq 3$), so liegen die Punkte P_n (n | a(n)) auf dem Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades (einer kubischen Funktion) f(n) und die Punkte Q_n (n | $a_0(n)$) auf dem Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades $f_0(n)$.
Bestimmen Sie die ganzrationalen Funktionen f(n) und $f_0(n)$.

b) Ist $a_1(n)$ die Anzahl der Einheitswürfel mit 1 Punkt und $a_2(n)$ die Anzahl der Einheitswürfel mit 2 Punkten bei einem gestuften Körper der Höhe n ($n \geq 3$), so liegen die Punkte R_n (n | $a_1(n)$) auf einer quadratischen Funktion $f_1(n)$ und die Punkte S_n (n | $a_2(n)$) auf einer quadratischen Funktion $f_2(n)$.
Bestimmen Sie die quadratischen Funktionen $f_1(n)$ und $f_2(n)$.

c) Ist $a_3(n)$ die Anzahl der Einheitswürfel mit 3 Punkten bei einem gestuften Körper der Höhe n ($n \geq 3$), so liegen die Punkte T_n (n | $a_3(n)$) auf einer linearen Funktion $f_3(n)$.
Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion $f_3(n)$.

2. Zerlegt man den gestuften Körper der Höhe n wieder in Einheitswürfel und legt die Einheitswürfel in einen Beutel, so kann das Ziehen (mit Zurücklegen) eines Würfels aus dem Beutel als Zufallsexperiment aufgefasst werden.
Es sei $p_0(n)$ [$p_1(n)$, $p_2(n)$, $p_3(n)$] die Wahrscheinlichkeit, einen Würfel mit genau 0 (1, 2, 3) Punkten aus den Beutel zu ziehen.

a) Zeigen Sie, dass $p_0(n)$ für $n \geq 3$ streng monoton steigend ist und berechnen Sie den Grenzwert von $p_0(n)$ für $n \to \infty$.

b) Berechnen Sie, aus wie vielen Einheitswürfeln ein gestufter Körper wenigstens besteht, damit die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Einheitswürfels mit 0 Punkten wenigstens 90 % beträgt.

c) Bestimmen Sie n so, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Einheitswürfel mit genau 1 Punkt (2 Punkten, 3 Punkten) maximal wird.

3. Es sei E (X) der Erwartungswert für die Anzahl der Punkte auf einem Einheitswürfel der Höhe n ($n \geq 3$).

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert.

b) Bestimmen Sie die Höhe eines gestuften Körpers so, dass der Erwartungswert 2 ist.
Begründen Sie, ohne auf den berechneten Erwartungswert (siehe Aufgabenteil a) zuzugreifen, dass der Erwartungswert mit zunehmendem n, $n \geq 8$ abnimmt.

Lösungen

1.

a) Ein Körper der Höhe n = 1 besteht aus 1 Einheitswürfel, ein Körper der Höhe 2 aus 5 Einheitswürfeln. Addiert man die Anzahl der Einheitswürfel mit 0 (1, 2, 3, 4, 5) Punkten bei einer Körperhöhe von n = 3 (4, 5, 6, 7) cm, so erhält man die Gesamtanzahl von Einheitswürfeln für diese Körperhöhe.

Höhe n	1	2	3	4	5	6	7
Gesamtanzahl der Einheitswürfel	1	5	14	30	55	91	140

Eine ganzrationale Funktion f 3. Grades hat die allgemeine Form:
$f(n) = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d,\ n \in \mathbb{N}$ Einsetzen von 4 Wertepaaren der Tabelle liefert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} f(1)=1 & \text{I} & a+b+c+d=1 \\ f(2)=5 & \text{II} & 8a+4b+2c+d=5 \\ f(3)=14 & \text{III} & 27a+9b+3c+d=14 \\ f(4)=30 & \text{IV} & 64a+16b+4c+d=30 \end{array}$$

Durch schrittweise Elimination der Variablen:

$$\begin{array}{lll} \text{II}-\text{I}: & 7a+3b+c=4 & (\text{I}') \\ \text{III}-\text{II}: & 19a+5b+c=9 & (\text{II}') \\ \text{IV}-\text{III}: & 37a+7b+c=16 & (\text{III}') \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II}'-\text{I}': & 12a+2b=5 & (\text{I}'') \\ \text{III}'-\text{II}': & 18a+2b=7 & (\text{II}'') \end{array}$$

$$\text{II}''-\text{I}'':\quad 6a=2 \qquad \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$a=\frac{1}{3} \text{ in I}'':\quad 4+2b=5 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

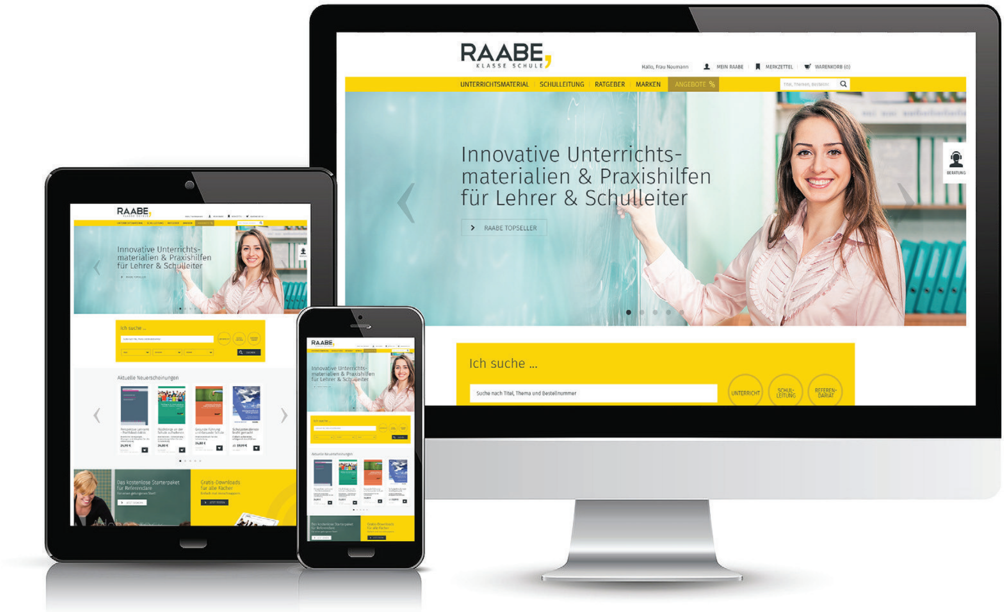
$$a=\frac{1}{3} \text{ und } b=\frac{1}{2} \text{ in I}':$$

$$\frac{7}{3}+\frac{3}{2}+c=4 \qquad \Rightarrow c=\frac{1}{6}$$

$f(n):=a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n+d$	*Fertig*
$\text{linSolve}\left(\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=5 \\ f(3)=14 \\ f(4)=30 \end{cases},\{a,b,c,d\}\right)$	$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{6},0\right\}$
$f(n):=\frac{1}{3}\cdot n^3+\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot n$	*Fertig*
$f(5)$	55
$f(6)$	91
$f(7)$	140

RAABE, KLASSE SCHULE

Der RAABE Webshop:
Schnell, übersichtlich, sicher!



Wir bieten Ihnen:

- Schnelle und intuitive Produktsuche
- Übersichtliches Kundenkonto
- Komfortable Nutzung über Computer, Tablet und Smartphone
- Höhere Sicherheit durch SSL-Verschlüsselung

Mehr unter: www.raabe.de